Часть II. Прямые и плоскости

§7. Плоскость в пространстве

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Рассмотрение плоскости в пространстве во многом аналогично рассмотрению прямой на плоскости. В случаях полной аналогии мы не будем приводить подробных доказательств, ссылаясь на соответствующие утверждения и теоремы §6.

7.1. Поверхности и их уравнения

Под поверхностью в пространстве мы будем понимать геометрический образ некоего уравнения.

Определение

Пусть в пространстве задана аффинная система координат $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Рассмотрим функцию трёх переменных $F(x, y, z)$. *Геометрическим образом уравнения*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

относительно системы координат $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ называется множество σ, состоящее из точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), т. е.

$$M(x_0, y_0, z_0) \in \sigma \iff F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Уравнение (1) называется *общим (или координатным) уравнением* σ.

Пример. Рассмотрим определение сферы как геометрического места точек пространства, равноудаленных от некоторой фиксированной точки, называемой центром сферы, на заданное расстояние, называемое радиусом сферы.

Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — прямоугольная декартова система координат и $C(x_C, y_C, z_C)$ — центр сферы σ, а R — её радиус. По определению сферы $M(x, y, z) \in \sigma \;\Leftrightarrow\; |MC| = R \;\Leftrightarrow\; |MC|^2 = R^2$. Записывая последнее равенство в координатах системы $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, получим общее уравнение сферы

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2.$$

Параметрические уравнения поверхности

Определение

Пусть $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ — аффинная система координат, а $f(u, v)$, $g(u, v)$ и $h(u, v)$ — произвольные функции от двух переменных. Уравнения

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v) \end{cases} \tag{2}$$

называются *параметрическими уравнениями* поверхности σ в пространстве, если

$$M(x_0, y_0, z_0) \in \sigma \;\Leftrightarrow\; \exists u_0, v_0 \in \mathbb{R}\colon$$
$$x_0 = f(u_0, v_0),\; y_0 = g(u_0, v_0) \text{ и } z_0 = h(u_0, v_0).$$

Переменные u и v называются *параметрами*.

Снова рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Составим параметрические уравнения сферы σ радиуса R с центром в начале координат. Возьмем точку $M(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$ (см. рис. 7.1 на следующем слайде).

Спроектируем точку M на плоскость Oxy. Получим точку $M'(x_0, y_0, 0)$.

В качестве параметров возьмем $u = (\widehat{\overrightarrow{OM'}, \vec{i}})$ и $v = (\widehat{OM}, \vec{k})$. Имеем $|OM'| = \cos R \sin v$, $x_0 = |OM'| \cos u = R \cos u \sin v$,
$y_0 = |OM'| sinu = R \sin u \sin v$, $z_0 = R \cos v$.

Аналогично примеру с окружностью из §6 проверяется, что любая такая точка лежит на заданной сфере. Тем самым мы получили параметрические уравнения сферы σ:

$$\begin{cases} x = R \cos u \sin v, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = R \cos v. \end{cases}$$

Параметрические уравнения сферы (2)

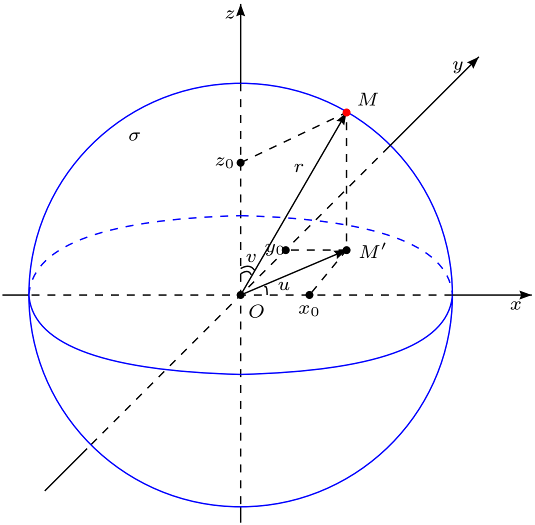

Рис. 7.1. Параметризация сферы

6.2. Виды уравнений плоскости в пространстве в аффинной системе координат

Зафиксируем аффинную систему координат в пространстве $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Координатные оси будем традиционно обозначать Ox, Oy и Oz.

Определение

Пусть π — плоскость в пространстве. Любой вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ такой, что $\vec{a} \parallel \pi$ называется *направляющим вектором плоскости π*.

Пусть плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Пусть также $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ — два неколлинеарных направляющих вектора π. Тогда $M \in \pi \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{M_0M} \parallel \pi$ (см. рис. 7.2 на следующем слайде). Поскольку $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ образуют базис множества векторов, компланарных π, то $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{b}_1 + v\vec{b}_2$ для некоторых $u, v \in \mathbb{R}$.Поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0}$, то получаем

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + u\vec{b}_1 + v\vec{b}_2. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называют *векторным уравнением* плоскости π.

Систему координат $(M_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называют *внутренней системой координат плоскости π*, её базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — *внутренним базисом плоскости π*, а $(u,\, v)$ — *внутренними координатами точки M*.

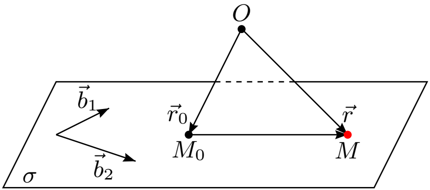

Рис. 7.2

Запишем уравнение (3) в координатах: $[M] = [M_0] + u[\vec{b}_1] + v[\vec{b}_2]$. Пусть $\vec{b}_1 = (p_1, q_1, r_1)$, $\vec{b}_2 = (p_2, q_2, r_2)$. Тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + up_1 + vp_2, \\ y = y_0 + uq_1 + vq_2, \\ z = z_0 + ur_1 + vr_2. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнения (4) называют *параметрическими уравнениями* плоскости π.

Каноническое уравнение плоскости и уравнение по трём точкам

Поскольку $M \in \pi$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ компланарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называются *каноническим уравнением* плоскости π или *уравнением плоскости по точке и двум неколлинеарным направляющим векторам*.

Теперь пусть плоскость π проходит через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. В этом случае в качестве неколлинеарных направляющих векторов π можно взять векторы $\overrightarrow{M_1, M_2}$ и $\overrightarrow{M_1, M_2}$. Уравнение (5) в этом случае примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *уравнением плоскости по трём точкам*.

Общее уравнение плоскости в пространстве (1)

Разложив определитель в уравнении (5) по первой строке и положив
$A = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$, получим
$A(x - x_0) = B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Обозначим
$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тем самым уравнение 5 примет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) называется *общим уравнением плоскости в пространстве*. Заметим, что в уравнении (7) числа A,B и C не могут быть одновременно равны 0.

Определение

Уравнение (7),где A,B и C одновременно не равны 0, называется *алгебраическим уравнением 1-й степени (или линейным уравнением) с тремя неизвестными*.

Общее уравнение плоскости в пространстве (2)

Теорема 7.1.

В аффинной системе координат в пространстве плоскости и только они являются геометрическими образами алгебраических уравнений 1-й степени с тремя неизвестными.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1 $\square$

Утверждение 7.1

Если плоскость π задана общим уравнением (7), то вектор (A, B, C) не компланарен π.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 6.1 $\square$

Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости.

Пусть плоскость π задана общим уравнением (7). Тогда очевидно

- $A = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \parallel Ox$,
- $B = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \parallel Oy$,
- $C = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \parallel Oz$,
- $A = B = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \parallel Oxy$,
- $A = C = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \parallel Oxz$,
- $B = C = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \parallel Oyz$,
- $D = 0 \;\Leftrightarrow\;$ плоскость π проходит через начало координат.

7.3. Виды уравнений плоскости в прямоугольной декартовой системе координат

Зафиксируем прямоугольную декартову систему координат в пространстве $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть π — плоскость.

Определение

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой π называется *нормальным вектором плоскости* π.

Замечание. Если $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ — два неколлинеарных направляющих вектора плоскости π, то $\vec{n} = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ будет её нормальным вектором.

Утверждение 7.2

Если плоскость π задана общим уравнением (7) $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является её нормальным вектором.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 6.2. □

Рассмотрим ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$. Проведем плоскость π через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно $\vec{n}$.

Произвольная точка

$$M(x, y, z) \in \pi \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{M_0M} \parallel \ell \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \ \Leftrightarrow \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}.$$

Записав последнее равенство в координатах получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - Z_0) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) называется *уравнением плоскости через точку и нормальный вектор*.

Теперь, если плоскость π задана общим уравнением (7) и не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат, т. е. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то из $Ax + By + Cz + D = 0$ следует $\dfrac{x}{-D/A} + \dfrac{y}{-D/B} + \dfrac{z}{-D/C} = 1$. Обозначим $a := -C/A$, $b := -C/B$ и получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{9}$$

Уравнение (9) называется *уравнением плоскости π в отрезках*.

Действительно, точки $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$ лежат на плоскости, т. е. плоскость «отсекает» на координатных осях отрезки a, b и c (возможно отрицательные — см. рис. 7.3 на следующем слайде).

Рисунок к уравнению плоскости в отрезках

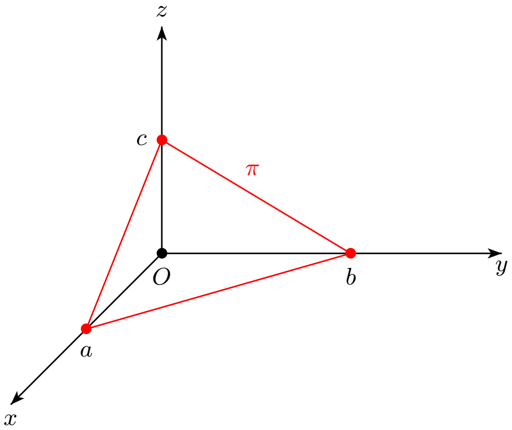

Рис. 7.3

7.3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

В этом пункте предполагается аффинная система координат. Следующий вопрос, который мы рассмотрим, звучит так: как по уравнениям двух плоскостей определить взаимное расположение этих плоскостей, т. е. выяснить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Ответ на него дает

Теорема 7.2

Пусть плоскость π_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а плоскость π_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскости π_1 и π_2:

1. пересекаются тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;
2. параллельны тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$;
3. совпадают тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Однородные системы (1)

Для доказательства теоремы 7.2 нам потребуются вспомогательные факты, которые помогут понять поведение решений системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

Лемма 7.1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Положим $a = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ и пусть не все числа a, b, c равны 0.

Решение $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ системы (10) будем интерпретировать как вектор в некотором фиксированном базисе.

Тогда множество всех решений системы (10) — это множество векторов, коллинеарных вектору (a, b, c).

Доказательство. Без ограничения общности пусть $c \neq 0$. Зафиксируем $z = z_0$ и подставим в (10). Получим

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0. \end{cases}$$

Поскольку $c \neq 0$ — определитель основной матрицы этой системы, то по формулам теоремы Крамера

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1z_0 & B_1 \\ -C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{c} = \frac{z_0 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{c} = \frac{z_0a}{c}.$$

Аналогично $y = \dfrac{z_0b}{c}$. В частности, для $z_0 = c$ получим $x = a$, $y = b$, т. е. (a, b, c) — решение системы (10). Поскольку эта система однородная, то для любого $t \in \mathbb{R}$ вектор $t(a, b, c)$ тоже будет решением системы (10).

Теперь, если $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — некоторое решение системы (10), то положим $z_0 = \bar{z}$, откуда $\bar{x} = \dfrac{\bar{z}a}{c}$, $\bar{y} = \dfrac{\bar{z}b}{c}$, т. е. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \dfrac{\bar{z}}{c}(a, b, c)$. Тем самым любое решение системы (10) коллинеарно (a, b, c). $\square$

Лемма 7.2

Пусть уравнение $Ax + By + Cz = 0$ имеет два неколлинеарных решения (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Тогда

$$A : B : C = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Доказательство. Подставим наши решения в уравнение. Получим

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0. \end{cases}$$

Посмотрим на эти равенства как на систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными A, B и C. Так как (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) неколлинеарны, то один из определителей в правой части равенства (11) отличен от нуля. Без ограничения общности, пусть $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

В этом случае система

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 = -Cz_1, \\ Ax_2 + By_2 = -Cz_2 \end{cases}$$

имеет ненулевой определитель основной матрицы, следовательно, по теореме Крамера

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -Cz_1 & y_1 \\ -Cz_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{C\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}.\ \text{Значит, } A : C = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$B = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -Cz_1 \\ x_2 & -Cz_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{C\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}},\ \text{т. е. } B : C = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Лемма 7.3

Уравнения

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z &= 0,\\
A_2x + B_2y + C_2z &= 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

имеют одно и то же множество решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Оба уравнения определяют одну и ту же плоскость, проходящую через начало координат. Пусть $\vec{b}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — два неколлинеарных направляющих вектора этой плоскости, т. е. два неколлинеарных решения уравнений (12), следовательно, по лемме 7.2

$$A_1 : B_1 : C_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = A_2 : B_2 : C_2,$$

откуда следуют необходимые равенства отношений.

Лемма о векторе, компланарном плоскости

Достаточность очевидна, т. к. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ означает, что уравнения (12) эквивалентны, то есть имеют одно и то же множество решений. □

Лемма 7.4

Пусть плоскость π задана общим уравнением (7) $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор $\vec{v} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ компланарен π тогда и только тогда, когда $A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} = 0$.

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Значит $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Отложим $\vec{v}$ от точки M_0, т. е. $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M}$, где $M(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})$. Получаем

$$\vec{v} \parallel \pi \;\Leftrightarrow\; M \in \pi \;\Leftrightarrow\; A(x_0 + \bar{x}) + B(y_0 + \bar{y}) + C(x_0 + \bar{z}) + d = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_{0} + A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} = 0.$$

□

Доказательство теоремы 7.2 (1)

Доказательство теоремы 7.2 Если $\pi_1 \parallel \pi_2$ или $\pi_1 = \pi_2$, тогда и только тогда, когда множество компланарных им векторов одно и то же. По лемме 7.4 для любого вектора $\vec{v} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ из этого множества будет выполняться

$$\begin{cases} A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1\bar{z} = 0, \\ A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2\bar{z} = 0. \end{cases}$$

Но среди этого множества векторов найдутся два некомпланарных, тогда по лемме 7.3 $(\pi_1 \parallel \pi_2$ или $\pi_1 = \pi_2) \ \Leftrightarrow \ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = t.$

Чтобы определить общие точки π_1 и π_2 рассмотрим систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Имеем $\pi_1 \parallel \pi_2 \ \Leftrightarrow$ система (13) несовместна $\Leftrightarrow \ \dfrac{D_1}{D_2} \neq t.$

Далее, $\pi_1 = \pi_2 \ \Leftrightarrow$ уравнения системы (13) эквивалентны $\Leftrightarrow \ \dfrac{D_1}{D_2} = t.$

Тем самым пункты *2* и *3* теоремы 7.2 доказаны.

Доказательство теоремы 7.2 (2)

Докажем пункт *1* теоремы 7.2.

Необходимость. Если π_1 и π_2 пересекаются, то $\pi_1 \nparallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2$, значит по уже доказанным пунктам 2 и 3 равенства отношений $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ не имеют место, т. е. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Достаточность. Наоборот, если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то по лемме 7.1 векторы, компланарных одновременно π_1 и π_2 коллинеарны некоторому вектору, то есть среди них не найдется двух линейно независимых векторов, а значит $\pi_1 \nparallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2$, следовательно плоскости π_1 и π_2 пересекаются. □

7.5. Пучок плоскостей

В этом пункте система координат аффинная.

Определение

Несобственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, параллельных или совпадающих с данной плоскостью.

Из определения ясно, что несобственный пучок определяется любой своей плоскостью. Более того, очевидно

Утверждение 7.3

Пусть плоскость π задается общим уравнением (7) $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда плоскость принадлежит несобственному пучку плоскостей, определяемому плоскостью π тогда и только тогда, когда её уравнение для подходящего $\lambda \in \mathbb{R}$ может быть записано в виде

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) называется *уравнением несобственного пучка плоскостей*.

Определение

(Собственным) пучком плоскостей называется множество прямых плоскости, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Очевидно, что пучок прямых определяется однозначно парой своих различных плоскостей.

Теорема 7.3

Пусть π_1 и π_2 — пара пересекающихся плоскостей, а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — их общие уравнения соответственно. Плоскость принадлежит пучку плоскостей, определяемому π_1 и π_2 тогда и только тогда, когда её уравнение может быть записано в виде

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (15)$$

для подходящих $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и одновременно не равных нулю.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.3. $\square$

Уравнение (15) называется *уравнением (собственного) пучка плоскостей*.

7.6. Полупространства

В этом, как и в предыдущем пункте система координат аффинная.

Определение

Если плоскость π задана общим уравнением (7) $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *главным вектором* π.

Замечания.

- Если система координат прямоугольная, то главный вектор — это нормальный вектор (нормаль).
- Главный вектор определен не однозначно, а относительно общего уравнения плоскости.
- Все главные векторы плоскости коллинеарны.
- Согласно утверждению 7.1 главный вектор плоскости не компланарны ей.

Полупространства (1)

Всё пространство делится плоскостью на три непересекающиеся части: саму плоскость π и два полупространства (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от π). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 7.4.

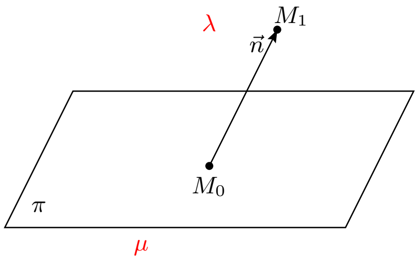

Рис. 7.4. Полупространства

Пусть $\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1}$ — главный вектор π и $M_0 \in \pi$. Поскольку $\vec{n} \nparallel \pi$, то $M_1 \notin \pi$. Обозначим ту полуплоскость, в которой лежит точка M_1, через λ, а другую — через μ.

Полупространства (2)

Теорема 7.4

Пусть $M(x', y', z')$ — произвольная точка. Тогда

1. $M \in \lambda \;\Leftrightarrow\; Ax' + By' + Cz + D > 0,$
2. $M \in \mu \;\Leftrightarrow\; Ax' + By' + Cz + D < 0.$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.4. □

Следствие. Точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ расположены по одну сторону от π тогда и только тогда, когда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2$ имеют одинаковые знаки, и по разные стороны тогда и только тогда, когда разные.

7.7. Расстояние от точки до прямой на плоскости

В этом пункте система координат прямоугольная декартовая.

Пусть в этой системе задана плоскость π общим уравнением (7) $Ax + By + Cz + D = 0$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка.

Утверждение 7.4 (расстояние от точки до плоскости)

Расстояние от точки M_1 до плоскости π выражается формулой

$$d(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 6.4.

7.8. Угол между плоскостями

В этом пункте система координат прямоугольная декартовая.

Если две плоскости параллельны или совпадают, то угол между ними по определению равен нулю. Пересекающиеся плоскости образуют между собой четыре двугранных угла. Углом между плоскостями считается меньший из них.

Утверждение 7.5

Если плоскости π_1 и π_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно, то

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 6.5 $\square$

Из утверждения 7.5 очевидно следует

Утверждение 7.6 (критерий перпендикулярности плоскостей)

Если плоскости π_1 и π_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно, то

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$