Часть II. Прямые и плоскости

§6. Прямая на плоскости

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

6.1. Кривые на плоскости и их уравнения

Мы не будем давать точного определения кривой — этот не простой вопрос выходит за рамки данного курса (строгое определение кривой дается в курсе дифференциальной геометрии). Под кривой на плоскости мы будем понимать геометрический образ некоего уравнения.

Определение

Пусть на плоскости задана произвольная декартова (или далее аффинная) система координат $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Рассмотрим функцию двух переменных $F(x, y)$. *Геометрическим образом уравнения*

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

относительно системы координат $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ называется множество ℓ, состоящее из точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), т. е.

$$M(x_0, y_0) \in \ell \;\Leftrightarrow\; F(x_0, y_0) = 0.$$

Уравнение (1) называется *общим (или координатным) уравнением* ℓ.

Общее уравнение окружности

Геометрический образ уравнения — частный случай так называемого геометрического места точек, понимаемого в геометрии как множество точек, удовлетворяющих некоторому условию.

Пример. Рассмотрим определение окружности как геометрического места точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки, называемой центром окружности, на заданное расстояние, называемое радиусом окружности.

Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j})$ — прямоугольная декартова система координат и $C(x_C, y_C)$ — центр окружности c, а R — её радиус. По определению окружности $M(x, y) \in c \;\Leftrightarrow\; |MC| = R \;\Leftrightarrow\; |MC|^2 = R^2$. Записывая последнее равенство в координатах системы $(O, \vec{i}, \vec{j})$, получим общее уравнение окружности

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2.$$

Замечание. Формально следуя определению общего уравнения мы должны были записать общее уравнение окружности в виде $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 - R^2 = 0$, которое эквивалентно полученному выше, но мы будем допускать такую вольность в записи общеих уравнений кривых.

Параметрические уравнения кривой

К сожалению, не все кривые можно задавать общим уравнением или такое уравнение сложно найти. Другой способ наложить условия на координаты точки кривой — выразить зависимость координат точки от параметра.

Определение

Пусть $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ — аффинная система координат, а $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции от одной переменной. Уравнения

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases} \tag{2}$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой ℓ на плоскости, если

$$M(x_0, y_0) \in \ell \ \Leftrightarrow\ \exists t_0 \in \mathbb{R}:\ x_0 = f(t_0) \text{ и } y_0 = g(t_0).$$

Переменная t называется *параметром*.

Параметрические уравнения окружности

Снова рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Составим параметрические уравнения окружности c радиуса R с центром в начале координат. Возьмем точку $M(x_0, y_0) \in c$ (см. рис. 6.1).

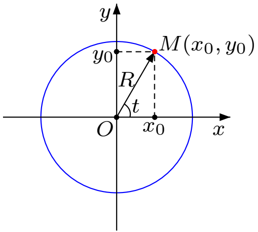

Рис. 6.1

В качестве параметра t рассмотрим угол, который составляет вектор $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox. Очевидно, что $x_0 = R\cos t$, $y_0 = R\sin t$. И наоборот, если для точки $M(x_0, y_0)$ существует такое число t, что $x_0 = R\cos t$, $y_0 = R\sin t$, то $x_0^2 + y_0^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$, то есть точка M удовлетворяет общему уравнению окружности c радиуса R с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Тем мы показали, что $M(x_0, y_0) \in c \ \Leftrightarrow \ \exists t : x_0 = R\cos t, y_0 = R\sin t$. Тем самым мы получили параметрические уравнения окружности c:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

6.2. Виды уравнений прямой на плоскости в аффинной системе координат

Зафиксируем аффинную систему координат на плоскости $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Координатные оси будем традиционно обозначать Ox и Oy.

Определение

Пусть ℓ — прямая на плоскости. Любой вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ такой, что $\vec{a} \parallel \ell$ называется *направляющим вектором прямой ℓ*.

Пусть прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, а $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Если $\vec{a}$ — направляющий вектор ℓ, то $M \in \ell \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ (см. рис. 6.2)

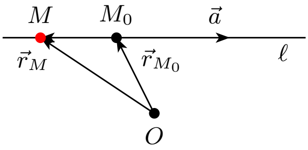

Рис. 6.2

Тем самым для некоторого $t \in \mathbb{R}$ можно записать $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$. Поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0}$, получим

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + t\vec{a}. \tag{3}$$

Уравнение (3) называют *векторным уравнением* прямой ℓ.

Запишем уравнение (3) в координатах: $[M] = [M_0] + t[\vec{a}]$. Пусть $\vec{a} = (p, q)$. Тогда получим

$$\begin{cases} x = x_0 + tp, \\ y = y_0 + tq. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнения (4) называют *параметрическими уравнениями* прямой ℓ.

Выразим параметр t из уравнений (4) и приравняем его выражения, то получим

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \tag{5}$$

Уравнение (5) называются *каноническим уравнением* прямой ℓ. Заметим, что каноническое уравнение (5) можно получить из критерия коллинеарности векторов (утверждение 1.11).

Поскольку $\vec{a} = (p, q) \neq \vec{0}$, то числа p и q одновременно не равны 0. Однако, одно из них может быть равно 0. Т. е. в уравнении (5) мы можем получить ноль в знаменателе. Такая запись допускается, она означает, что в этом случае соответствующий числитель равен 0. Например, если $q = 0$, то уравнение (5) приобретает вид $y - y_0 = 0$.

Чтобы избежать ситуации нуля в знаменателе каноническое уравнение прямой (5) можнео записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p & q \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь пусть прямая ℓ проходит через две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. В этом случае в качестве направляющего вектора ℓ можно взять вектор $\overrightarrow{M_1, M_2}$. Уравнение (5) в этом случае примет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_2 - y_1}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) называется *уравнением прямой по двум точкам*.

Общее уравнение прямой на плоскости (1)

Преобразуя уравнение (5) получим $qx - py - qx_0 + py_0 = 0$. Положив $A = q$, $B = -p$, $C = -qx_0 + py_0$ это уравнение примет вид

$$Ax + By + C = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Заметим, что в уравнении (7) числа A и B не могут быть одновременно равны 0.

Определение

Уравнение (7),где A и B одновременно не равны 0, называется *алгебраическим уравнением 1-й степени (или линейным уравнением) с двумя неизвестными*.

Теорема 6.1.

В аффинной системе координат на плоскости прямые и только они являются геометрическими образами алгебраических уравнений 1-й степени с двумя неизвестными.

Общее уравнение прямой на плоскости (2)

Доказательство. *Необходимость.* То, что для любой прямой можно составить её общее уравнение типа (7) показано выше.

Достаточность. Рассмотрим произвольное уравнение типа (7) $Ax + By + C = 0$, причем A и B одновременно не равны нулю. Пусть без ограничения общности $A \neq 0$. Тогда координаты точки $M_0(-C/A, 0)$ очевидно удовлетворяют этому уравнению. Рассмотрим вектор $\vec{a} = (-B, A)$ и прямую ℓ, проходящую через M_0 параллельно $\vec{a}$. Согласно приведенным выше выкладкам её каноническое уравнение вида (5) будет иметь вид

$$\frac{x + C/A}{-B} = \frac{y}{A}$$

или $Ax + By + C = 0$, т. е. прямая ℓ — геометрический образ этого уравнения. $\square$

Замечание. Если прямая задана общим уравнением (7), то вектор $\vec{a} = (-B, A)$ является её направляющим вектором.

Общее уравнение прямой на плоскости (3)

Утверждение 6.1

Если прямая ℓ задана общим уравнением (7), то вектор (A, B) не коллинеарен ℓ.

Доказательство. Положим $\vec{n} = (A, B)$ и пусть $M(x_0, y_0) \in \ell$. Отложим $\vec{n}$ от точки M_0, т. е. пусть $\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда $M_1(x_0 + A, y_0 + B$. Подставим координаты точки M_1 в уравнение (7). Получим
$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 \neq 0$,
т. е. $M_1 \notin \ell$, а значит $\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1} \nparallel \ell$. □

Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением (7). Тогда очевидно

- $A = 0 \;\Leftrightarrow\; \ell \parallel Ox$,
- $B = 0 \;\Leftrightarrow\; \ell \parallel Oy$,
- $C = 0 \;\Leftrightarrow\;$ прямая ℓ проходит через начало координат.

6.3. Виды уравнений прямой в прямоугольной декартовой системе координат

Зафиксируем прямоугольную декартову систему координат на плоскости $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Пусть ℓ — прямая на этой плоскости.

Определение

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой ℓ называется *нормальным вектором прямой ℓ*.

Утверждение 6.2

Если прямая ℓ задана общим уравнением (7) $Ax + By + C = 0$, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ является её нормальным вектором.

Доказательство. Согласно утверждению 6.1 $\vec{a} = (-B, A)$ — направляющий вектор ℓ. Т. к. $\vec{a}\vec{n} = -AB + BA = 0$, то $\vec{n} \perp \vec{a}$, а значит $\vec{n} \perp \ell$. □

Рассмотрим ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$. Проведем прямую ℓ через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно $\vec{n}$. Произвольная точка $M(x, y) \in \ell \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}$.

Записав последнее равенство в координатах получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) называется *уравнением прямой через точку и нормальный вектор*.

Пусть прямая ℓ задана общим уравнением (7) $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$, т. е. $\ell \nparallel Oy$. Тогда $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Положив $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$ получим

$$y = kx + b. \tag{9}$$

Число k называется *угловым коэффициентом прямой ℓ*, а уравнение (9) — *уравнением прямой ℓ с угловым коэффициентом*

Обозначим через φ угол между положительным направлением оси Ox и прямой ℓ. Из школьного курса математики известно, что $k = \operatorname{tg}\varphi$, а прямая ℓ пересекает ось Oy в точке $(0, b)$ (см. рис. 6.3 на следующем слайде).

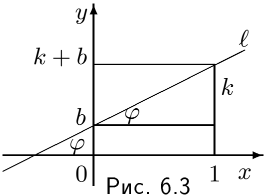

Рис. 6.3

Теперь, если прямая ℓ задана общим уравнением (7) и не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат, т. е. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то из $Ax + By + C = 0$ следует $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$. Обозначим $a := -C/A$, $b := -C/B$ и получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{10}$$

Уравнение (10) называется *уравнением прямой ℓ в отрезках*. Действительно, точки $(a, 0)$ и $(0, b)$ лежат на прямой, т. е. прямая «отсекает» на координатных осях отрезки a и b (возможно отрицательные — см. рис. 6.4 на следующем слайде).

Виды уравнений прямой в прямоугольной системе координат (3)

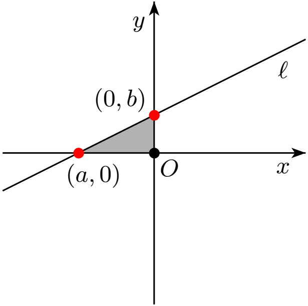

Рис. 6.4

6.3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

В этом пункте предполагается аффинная система координат. Следующий вопрос, который мы рассмотрим, звучит так: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т. е. выяснить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Ответ на него дает

Теорема 6.2

Пусть прямая ℓ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая ℓ_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Прямые ℓ_1 и ℓ_2:

1. пересекаются тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$;
2. параллельны тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;
3. совпадают тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \tag{11}$$

Используем обозначения из теоремы Крамера для основной матрицы системы второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

Достаточность. Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда система (11) по теореме Крамера имеет единственное решение, т. е. прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке. Заметим, что $\Delta \neq 0$ равносильно $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, что дает случай 1.

Пусть теперь $\Delta = 0$. Если система (11) имеет решение $x_0,\ y_0$, то

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 = -C_1, \\ A_2x_0 + B_2y_0 = -C_2. \end{cases}$$

Поскольку $\Delta = 0$, то положим $t = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, тогда $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$. Вычитая из 1-го уравнения 2-е, умноженное на t, получим $C_1 - tC_2 = 0$, т. е. $\dfrac{C_1}{C_2} = t$.

Взаимное расположение двух прямых (3)

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то в случае 2 решений системы быть не может, т. е прямые параллельны.

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то система (11) эквивалентна одному уравнению $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, геометрический образ которого — прямая ℓ_1, т. е. в случае 3 $\ell_1 = \ell_2$.

Необходимость. Пусть $M_2(x_2, y_1) \in \ell_2$, а $\vec{a}_1 = (-B_1, A_1)$, $\vec{a}_2 = (-B_2, A_2)$ — направляющие векторы ℓ_1 и ℓ_2 соответственно.

Случай 1. ℓ_1 пересекает ℓ_2, тогда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, то есть $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.

Случай 2. Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$, т. е. $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$. Заметим, что $M_2 \notin \ell_1$, значит $A_1x_2 + B_1y_2 + C_1 = t(A_2x_2 + B_2y_2 + C_2) + C_1 - tC_2 =$ $= C_1 - tC_2 \neq 0$, т. е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Случай 3: $\ell_1 = \ell_2$. Точка $M_2 \in \ell_1$, т. е. $C_1 - tC_2 = 0$, значит $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

$\square$

6.5. Пучок прямых

В этом пункте система координат аффинная.

Определение

Несобственным пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых, параллельных или совпадающих с данной прямой.

Очевидно, что несобственный пучок определяется любой своей прямой и образует класс эквивалентности по отношению «быть параллельной или совпадать» на множестве прямых плоскости. Более того, очевидно

Утверждение 6.3

Пусть прямая ℓ задается общим уравнением (7) $Ax + By + C = 0$. Тогда прямая принадлежит несобственному пучку прямых, определяемому прямой ℓ тогда и только тогда, когда её уравнение может быть записано в виде

$$Ax + By + \lambda = 0 \tag{12}$$

для подходящего $\lambda \in \mathbb{R}$.

Собственный пучок прямых (1)

Уравнение (12) называется *уравнением несобственного пучка прямых на плоскости*.

Определение

(Собственным) пучком прямых на плоскости называется множество прямых плоскости, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Очевидно, что пучок прямых определяется однозначно парой своих различных прямых.

Теорема 6.3

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — пара пересекающихся прямых, а $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — их общие уравнения соответственно. Прямая принадлежит пучку прямых, определяемому ℓ_1 и ℓ_2 тогда и только тогда, когда её уравнение может быть записано в виде

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (13)$$

для подходящих $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и одновременно не равных нулю.

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0) = \ell_1 \cap \ell_2$.

Необходимость. Пусть прямая ℓ с общим уравнением $Ax + By + C = 0$ из пучка прямых, определенным ℓ_1 и ℓ_2. Рассмотрим $\vec{n} = (A, B)$, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$. Так как $\ell_1 \nparallel \ell_2$, то по теореме 6.2 $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, т. е. $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, а значит они образуют базис плоскости, то есть $\vec{n} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем α и β одновременно не равны нулю, т. к. $\vec{n} \neq \vec{0}$. По координатам $[\vec{n}] = \alpha[\vec{n}_1] + \beta[\vec{n}_2]$, т. е. $A = \alpha A_1 + \beta A_2$, $B = \alpha B_1 + \beta B_2$. Тем самым общее уравнение ℓ примет вид

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + C = 0. \tag{14}$$

или после раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых

$$\alpha(A_1x + B_1y) + \beta(A_2x + B_2y) + C = 0. \tag{15}$$

Т. к. $M_0 \in \ell$, то

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0) + C = 0. \tag{16}$$

Собственный пучок прямых (3)

С другой стороны, $M_0 \in \ell_1$, следовательно, $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ или $C_1 = -A_1x_0 - B_1y_0$. Аналогично $C_2 = -A_2x_0 - B_2y_0$. Подставляя значения C_1 и C_2 в (16) получим $-\alpha C_1 - \beta C_2 + C = 0$ или $C = \alpha C_1 + \beta C_2$. Подставив это значение C в (15) получим (13).

Достаточность. Зафиксируем числа α и β одновременно не равные нулю.

Сначала покажем, что уравнение пучка (13) задает прямую. Очевидно это уравнение вида (14), где $C = \alpha C_1 + \beta C_2$. Чтобы геометрический образ такого уравнения был прямой линией, необходимо, чтобы оба коэффициента при x и y одновременно не были равны нулю. От противного, пусть

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть без ограничения общности $\alpha \neq 0$. Тогда из этой системы следует, что $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, что согласно теореме 6.2 противоречит тому, что ℓ_1 и ℓ_2 — пара пересекающихся прямых. Тем самым (13) задает некоторую прямую ℓ.

Собственный пучок прямых (4)

Теперь покажем, что эта прямая ℓ принадлежит пучку, определяемому прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Поскольку $M_0(x_0, y_0) = \ell_1 \cap \ell_2$, то это означает, что ℓ должна проходить через точку M_0. Подставим координаты точки M_0 в уравнение (13). Получим

$$\alpha(\underbrace{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}_{0}) + \beta(\underbrace{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}_{0}) = 0,$$

т. е. $M_0 \in \ell$. $\square$

6.6. Полуплоскости

В этом, как и в предыдущем пункте система координат аффинная.

Определение

Если прямая на плоскости ℓ задана общим уравнением (7) $Ax + By + C = 0$, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *главным вектором* ℓ.

Замечания.

- Если система координат прямоугольная, то главный вектор — это нормальный вектор (нормаль).
- Главный вектор определен не однозначно, а относительно общего уравнения прямой.
- Все главные векторы прямой коллинеарны.
- Согласно утверждению 6.1 главный вектор прямой не коллинеарен ей.

Полуплоскости (1)

Вся плоскость делится этой прямой на три непересекающиеся части: саму прямую ℓ и две полуплоскости (в каждую из этих полуплоскостей входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от ℓ). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 6.5.

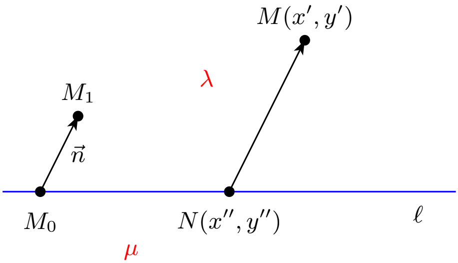

Рис. 6.5. Полуплоскости

Пусть $\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1}$ — главный вектор ℓ и $M_0 \in \ell$. Поскольку $\vec{n} \nparallel \ell$, то $M_1 \notin \ell$. Обозначим ту полуплоскость, в которой лежит точка M_1, через λ, а другую — через μ.

Полуплоскости (2)

Теорема 6.4

Пусть $M(x', y')$ — точка плоскости. Тогда

1. $M \in \lambda \;\Leftrightarrow\; Ax' + By' + C > 0$,
2. $M \in \mu \;\Leftrightarrow\; Ax' + By' + C < 0$.

Доказательство. Проведем прямую $(MN) \parallel \vec{n}$ и $N(x'', y'') \in \ell$, т. е. $Ax'' + By'' + c = 0$. Т. к. $\overrightarrow{NM} \parallel \vec{n} \neq \vec{0}$, то $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}$ для некоторого $t \neq 0$. В координатах $x' - x'' = tA$, $y' - y'' = B$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Ax' + By' + C &= A(x'' + tA) + B(y'' + tB) + C = \\ &= Ax'' + By'' + C + t(A^2 + B^2) = t(A^2 + B^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что знак $Ax' + By' + C$ совпадает со знаком t. Имеем $M \in \lambda \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{NM} \upuparrows \vec{n} \;\Leftrightarrow t > 0$, и $M \in \mu \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{NM} \uparrow\downarrow \vec{n} \;\Leftrightarrow t < 0$. □

Следствие. Точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ расположены по одну сторону от ℓ тогда и только тогда, когда $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ имеют одинаковые знаки, и по разные стороны тогда и только тогда, когда разные.

6.7. Расстояние от точки до прямой на плоскости

В этом пункте система координат прямоугольная декартовая.

Пусть в этой системе задана прямая ℓ общим уравнением (7) $Ax + By + C = 0$ и $M_1(x_1, y_1)$ — произвольная точка плоскости.

Утверждение 6.4 (расстояние от точки до прямой)

Расстояние от точки M_1 до прямой ℓ выражается формулой

$$d(M_1, \ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Зафиксируем на прямой произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Отложим от точки M_0 нормальный вектор $\vec{n}$ прямой ℓ и рассмотрим проекцию вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на вектор $\vec{n}$ (см. рис. 6.6 на следующем слайде). Очевидно, что расстояние $d = d(M_1, \ell) = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|$.

Расстояние от точки до прямой на плоскости (2)

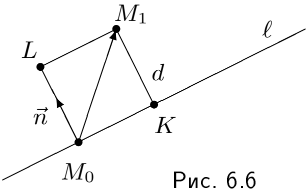

Рис. 6.6

Имеем $\left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. $\square$

6.8. Угол между прямыми на плоскости

В этом пункте система координат прямоугольная декартовая.

Если две прямые параллельны или совпадают, то угол между ними по определению равен нулю. Пересекающиеся прямые образуют между собой четыре угла. Углом между прямыми считается меньший из них.

Утверждение 6.5

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, то

$$\cos(\widehat{\ell_1, \ell_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Доказательство. Угол между прямыми равен углу между их нормалями $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ или смежному с ним углу. В любом случае это дает формулу утверждения. $\square$

Из утверждения 6.5 очевидно следует

Утверждение 6.6 (критерий перпендикулярности прямых на плоскости, заданных общими уравнениями)

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, то

$$\ell_1 \perp \ell_2 \ \Leftrightarrow\ A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Определение

Ориентированным углом между пересекающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называется угол, на который нужно повернуть прямую ℓ_1 вокруг точки пересечения против часовой стрелки до совпадения с прямой ℓ_2.

Ясно (см. рис. 6.7 на следующем слайде), что ориентированный угол φ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равен разности $\varphi_2 - \varphi_1$ углов, которые эти прямые образуют с положительным направлением оси Ox.

Ориентированный угол между прямыми (1)

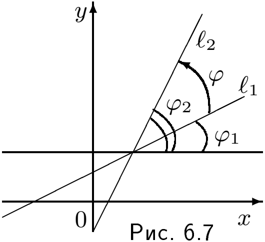

Рис. 6.7

Утверждение 6.7 (ориентированный угол между прямыми)

Пусть пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ соответственно. Тогда тангенс ориентированного угла между ними равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Ориентированный угол между прямыми (2)

Доказательство. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. $\square$

Из утверждения 6.7 немедленно следует

Утверждение 6.8 (критерий перпендикулярности прямых через угловые коэффиценты)

Пусть пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно. Тогда

$$\ell_1 \perp \ell_2 \iff k_1 k_2 = -1.$$