Часть I. Векторная алгебра

§5. Система координат

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

5.1. Система координат. Координаты точки

Определения

Системой координат называется совокупность, состоящая из точки O (называемой *началом координат*) и базиса $a = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.

Обозначение: (O, a) или $(O, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.

Такая система координат называется *произвольной декартовой* или *аффинной*. Если базис системы координат ортонормированный, то система координат называется *прямоугольной декартовой*.

Зафиксируем систему координат (O, a). Пусть M — произвольная точка. Вектор $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором точки M*.

Координатами точки M в системе координат (O, a) называются координаты её радиус-вектора $\vec{r}_M$ в базисе a.

Если $\vec{r}_M = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n$, то тот факт что точка M имеет в (O, a) координаты $t_1, \ldots, t_n$, будем записывать как $M(t_1, \ldots, t_n)$.

Замечание. На прямой точка имеет одну координату $(n = 1)$, на плоскости — две $(n = 2)$, а в пространстве — три $(n = 3)$.

Матричная форма записи координат

Для записи формул в матричном виде нам будет удобно записывать координаты не в строку, а в столбец.

Определения

Пусть задана точка $M(t_1, \ldots, t_n)$ в системе координат (O, a). Определим *координатный столбец точки M* как

$$[M] = \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Если одновременно рассматривается несколько систем координат, то будем помечать координатные столбцы одной и той же точки в разных системах координат индексами или штрихами.

Аналогично, если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ в базисе a, определим *координатный столбец вектора $\vec{x}$* как

$$[\vec{x}]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В случае, когда из контекста ясно, о каком базисе идет речь, индекс базиса можно опускать.

О координатах векторов и точек

Замечания. В силу теорем 1.9, 1.10 и 2.3 имеет место

- $[\vec{x}+\vec{y}] = [\vec{x}] + [\vec{y}]$ и $[t\vec{x}] = t[\vec{x}]$,
- в ортонормированном базисе $\vec{x}\vec{y} = [\vec{x}]^T \cdot [\vec{y}]$.

Утверждение 5.1

Пусть в произвольной декартовой системе координат даны две точки A и B. Тогда $[\overrightarrow{AB}] = [B] - [A]$..

Доказательство. Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, то $[\overrightarrow{AB}] = [\vec{r}_B - \vec{r}_A] = [\vec{r}_B] - [\vec{r}_A] = [B] - [A]$. $\square$

Утверждение 5.2

В прямоугольной декартовой системе координат расстояние между точками $A(t_1, \ldots, t_n)$ и $B(s_1, \ldots, s_n)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(s_1 - t_1)^2 + \ldots + (s_n - t_n)^2}.$$

Доказательство. $|AB|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (s_1 - t_1)^2 + \ldots + (s_n - t_n)^2$. $\square$

Деление отрезка в данном отношении (1)

5.2. Деление отрезка в данном отношении

Определение

Пусть A и B — две различные точки. Говорят, что *точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении t* ($t \neq -1$), если $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}$ (см. рис. 5.1).

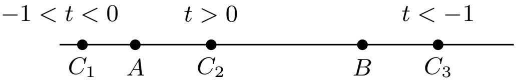

Рис. 5.1. Деление отрезка в данном отношении

Утверждение 5.3

В произвольной декартовой системе координат если точки A и B различны, $t \neq -1$ и точка C делит $\overrightarrow{AB}$ в отношении t, то

$$[C] = \frac{[A] + t[B]}{1 + t}.$$

Деление отрезка в данном отношении (2)

Доказательство. Поскольку $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}$, то $[\overrightarrow{AC}] = t[\overrightarrow{CB}]$. Согласно утверждению 5.1 $[C] - [A] = [\overrightarrow{AC}] = t[\overrightarrow{CB}] = t([C] - [B]) = t[B] - t[C]$. Откуда $(1+t)[C] = [A] + t[B]$. После деления на $1 + t \neq 0$ получаем формулу утверждения. □

Следствия:

- координаты середины C невырожденного отрезка AB находятся по формуле
$$[C] = \frac{1}{2}([A] + [B]);$$
- на плоскости для $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x, y)$ формула утверждения 5.3 приобретает вид
$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \ y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t};$$
- в пространстве для $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x, y, z)$ формула утверждения 5.3 приобретает вид
$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \ y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}, \ z = \frac{z_1 + tz_2}{1+t}.$$

Матрица перехода (1)

5.3. Замена системы координат Пусть $a = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ и $b = (b_1, \ldots, \_n)$ — два произвольных базиса, O и P — две произвольные точки. Рассмотрим две системы координат (O, a) (будем называть её старой) и (P, b) (новую). Наша задача — найти связь между координатами одной и той же точки в старой и новой системах координат.

Определение

Пусть векторы базиса b новой системы координат раскладываются по базису a старой системы координат следующим образом:

$$\begin{gathered}\vec{b}_1 = t_{11}\vec{a}_1 + \ldots + t_{n1}\vec{a}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{b}_n = t_{1n}\vec{a}_1 + \ldots + t_{nn}\vec{a}_n.\end{gathered}$$

Матрица

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода от базиса a к базису b*.

Матрица перехода (2)

Если из контекста понятно, о какой паре базисов идет речь, то индекс в обозначении матрицы перехода можно опускать.
Для краткости будем обозначат координаты точек и векторов в старой системе координат без штрихов, а в новой со штрихами.

Теорема 5.1 (о связи координат вектора в старом и новом базисах)

Пусть a и b — два произвольных базиса, а $T_{a,b}$ — матрица перехода от a к b. Тогда

$$[\vec{x}]_a = T_{a,b}[\vec{x}]_b.$$

Доказательство. Используем упрощенную запись. Нам надо доказать, что $[\vec{x}] = T[\vec{x}]'$. Пусть $[\vec{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $[\vec{x}]' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Имеем

$$T[\vec{x}]' = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}x'_1 + \ldots + t_{1n}x'_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_{n1}x'_1 + \ldots + t_{nn}x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= x'_1 \begin{pmatrix} t_{11} \\ \cdots \\ t_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + x'_n \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \cdots \\ t_{nn} \end{pmatrix} = x'_1[\vec{b}_1] + \ldots + x'_n[\vec{b}_n] = [x'_1\vec{b}_1 + \ldots + x'_n\vec{b}_n] = [\vec{x}].$$

□

Теорема 5.2 (формула замены системы координат)

Пусть (O, a) — старая система координат, (P, b) — новая, а $T = T_{a,b}$ — матрица перехода от базиса a к базису b. Тогда для любой точки M

$$[M] = [P] + T \cdot [M]'.$$

Доказательство. Поскольку $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$, то
$[M] = [\overrightarrow{OM}] = [\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}] = [\overrightarrow{OP}] + [\overrightarrow{PM}] = [P] + T[\overrightarrow{PM}]' = [P] + T[M]'$. □

Запишем в явном виде формулы замены системы координат в пространстве. Пусть (O, a) — старая система координат, а (P, b) — новая.

Замена координат на плоскости Пусть в старой системе координат $P(x_P, y_P)$, а $M(x, y)$ — произвольная точка, и в новой системе координат $M(x', y')$. Рассмотрим матрицу перехода от базиса a к базису b: $T = T_{a,b} = (t_{ij})_{2\times 2}$.
Тогда для плоскости формула теоремы 5.2 примет вид

$$\begin{cases} x = x_P + t_{11}x' + t_{12}y' \\ y = y_P + t_{21}x' + t_{22}y'. \end{cases}$$

Замена координат в пространстве Пусть в старой системе координат $P(x_P, y_P, z_P)$, а $M(x, y, z)$ — произвольная точка, и в новой системе координат $M(x', y', z')$. Рассмотрим матрицу перехода от базиса a к базису b: $T = T_{a,b} = (t_{ij})_{3\times 3}$.
Тогда для пространства формула теоремы 5.2 примет вид

$$\begin{cases} x = x_P + t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z', \\ y = y_P + t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z', \\ z = z_P + t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z'. \end{cases}$$

Поворот системы координат на плоскости (1)

Рассмотрим важный частный случай формул замены системы координат — *формулы поворота прямоугольной системы координат плоскости* (см. рис. 5.2):

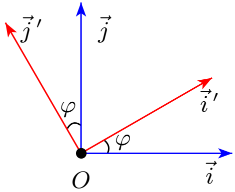

Рис. 5.2. Поворот системы координат

Утверждение 5.3 (формулы поворота прямоугольной декартовой системы координат плоскости)

Поворот прямоугольной декартовой системы координат плоскости на угол φ вокруг начала координат осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

Поворот системы координат на плоскости (2)

Доказательство. Составим формулы замены системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ на $(O, \vec{i}\,', \vec{j}\,')$ (см. рис. 5.3). Заметим, что начало координат не меняется, поэтому в обозначениях теоремы 5.2 $O = P$, т. е. $x_P = 0$, $y_P = 0$.
Составим матрицу перехода T от базиса $(\vec{i}, \vec{j})$ к базису $(\vec{i}\,', \vec{j}\,')$. Имеем

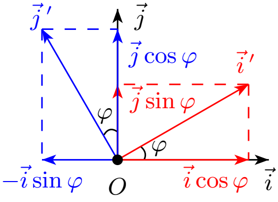

Рис. 5.3

$$\vec{i}\,' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$
$$\vec{j}\,' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Тем самым по теореме 5.2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в правой части равенства, получим формулы утверждения. □

Матрица (1) называется *матрицей поворота прямоугольной декартовой системы координат на угол φ вокруг начала координат*.