Часть I. Векторная алгебра

§4. Смешанное произведение векторов

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

4.1. Определение и свойства смешанного произведения

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

Утверждение 4.1 (критерий компланарности векторов)

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{0} \cdot \vec{c} = 0$.
Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $\vec{c}$ линейно выражается через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$ для некоторых чисел t и s. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки.
Поскольку $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$, то
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{a} + s\vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b})(s\vec{b}) = 0$

Геометрический смысл смешанного произведения (1)

Достаточность. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна.
Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда изображения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно определят плоскость π и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \pi$ по определению векторного произведения. Но $0 = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$, следовательно $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, т. е. $\vec{c} \parallel \pi$. □

Утверждение 4.2 (геометрический смысл смешанного произведения)

Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

Доказательство. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O. Получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Пусть также точка D — ортогональная проекция точки C на плоскость векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, которую мы обозначим σ, и $\alpha = \widehat{(\vec{c}, \sigma)}$, $\beta = \widehat{(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})}$ (см. рис. 4.1 на следующем слайде). Т. к. $\alpha + \beta = \pi/2$, то $\sin\alpha = \cos\beta$. Используя геометрический смысл векторного произведения (утверждение 3.4), получим
$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\beta = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

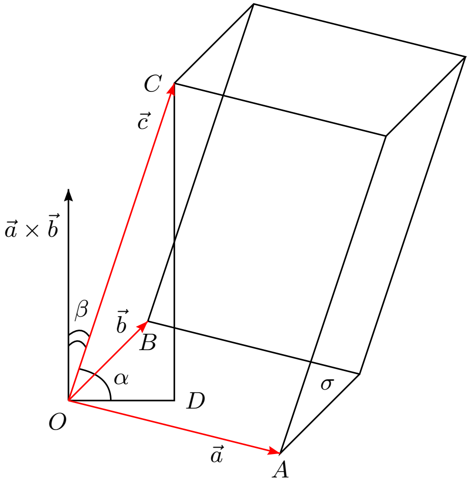

Рис. 4.1. Вычисление объема параллелепипеда

Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая, то тройка $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ правая. Но эти две тройки определяют один и тот же параллелепипед. В силу доказанного выше $V = \vec{b}\vec{a}\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{a}) = -(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
В обоих случаях (правой и левой троек) $V = |V| = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. □

Следствие. Из доказательства утверждения 4.2 вытекает

- Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$.
- Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

Теорема 4.1 (алгебраические свойства смешанного произведения)

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2. $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$;
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*);
5. $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

Доказательство алгебраических свойств смешанного произведения

Доказательство. *1.* Вне зависимости от порядка сомножителей в смешанном произведении векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определяют один и тот же параллелепипед. Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, то согласно доказательству утверждения 4.2 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V$. Поскольку циклическая перестановка не меняет ориентации тройки, а перестановка соседних векторов тройки меняет ориентацию на противоположную (утверждение 3.1), то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = V$, а $\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{c}\vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} = -V$, что соответствует 1. Случай левой тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ рассматривается аналогично.

2. Имеем $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c})(t\vec{a}) = t(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = t\vec{b}\vec{c}\vec{a} = t\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Вынесение за знак смешанного произведения из второго и третьего сомножителей доказывается аналогично.

Докажем *3.*
$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{d})(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{d})\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{d})\vec{b} = \vec{c}\vec{d}\vec{a}+\vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

Равенства *4* и *5* доказываются аналогично. □

В §3, теорема 3.1 (алгебраические свойства векторного произведения) были сформулированы, но не доказаны свойства 2—4, а именно

2. $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Окончание доказательства теоремы 3.1

2. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x}$. Имеем $((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t\vec{a})\vec{b}\vec{x} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = t(\vec{a} \times \vec{b}\vec{x}) = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}$. В силу слабого закона сокращения (утверждение 2.6) $(t\vec{a}) \times b = t(\vec{a} \times \vec{b})$.
Далее, $\vec{a} \times (t\vec{b}) = -(t\vec{b}) \times \vec{a} = -t(\vec{b} \times \vec{a}) = t(-\vec{b} \times \vec{a}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$.

3. Опять рассмотрим произвольный вектор $\vec{x}$. Получим $((\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x} = \vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x} = (\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x} = (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$.
Используя слабый закон сокращения, получим $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

4. Снова используем антикоммутативность векторного произведения: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = -(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}) = -\vec{b}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$. □

Смешанное произведение в ортонормированном базисе

Теорема 4.2

Пусть в ортонормированном базисе $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$. Тогда

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \vec{y}\vec{z}\vec{x} = (\vec{y} \times \vec{z})\vec{x}$. Имеем

$\vec{y} \times \vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \vec{k}$. Далее,

$$(\vec{y} \times \vec{z})\vec{x} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \cdot x_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

Следствия теоремы 4.2 В обозначениях теоремы 4.2

- $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$
- тройка $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ — правая $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0;$
- тройка $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ — левая $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0;$
- объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ равен

$$V = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\right),$$

где abs() — модуль (абсолютная величина) числа.