Часть I. Векторная алгебра

§3. Векторное произведение векторов

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

3.1. Определение векторного произведения

Для того, чтобы дать определение векторного произведения векторов, необходимо ввести понятие ориентации тройки векторов.

Определение

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется *правой*, если из конца вектора $\vec{c}$ поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и *левой* — в противном случае. Правую тройку векторов называют также *положительно ориентированной*, а левую — *отрицательно ориентированной* (см. рис. 3.1).

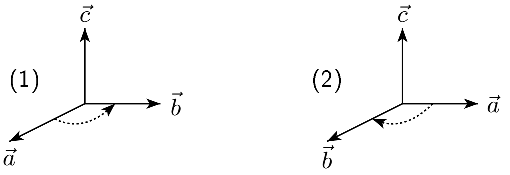

Рис. 3.1. Правая (1) и левая (2) тройки векторов

Ориентация тройки векторов (2)

Термины «правая» и «левая» тройки векторов имеют «антропологическое» происхождение: если смотреть с конца большого пальца на поворот от среднего пальца к указательному, то на правой руке он будет происходить против часовой стрелки, а на левой — по ней.

Причина, по которой правая тройка называется также положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной, станет ясной в следующем параграфе.

Очевидно, что справедливо следующее утверждение:

Утверждение 3.1

1. Перестановка двух соседних векторов в тройке меняет её ориентацию на противоположную.
2. Циклическая перестановка[1] векторов тройки не меняет её ориентацию.

[1] *Циклическая перестановка* — это переход от тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ к тройке $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ или к тройке $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

Определение векторного произведения векторов

Определение

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$,
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$,
3. тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно $\vec{0}$.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Замечания:

- Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 0$ или $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \pi$. В этом случае $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0 = 0$, что согласуется с условием 1 определения.
- Условие 2 определяет перпендикуляр к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- Условие 1 дает только две возможности отложить вектор нужной длины на этом перпендикуляре, а условие 3 делает выбор однозначным.

Векторное произведение в механике и физике

Векторное произведение неизменно связано с вращением. Приведем примеры трёх понятий, которые будут подробно изучены в дальнейшем на курсах физики, теоретической механики и математического анализа.

1. Момент силы — это векторная величина, характеризующая действие силы на твердое тело, которое может вызвать его вращательное движение. Если зафиксировать точку и рассмотреть $\vec{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы, а также $\vec{F}$ — вектор силы, то момент силы определяется как

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Условием статического равновесия является равенство нулевому вектору не только суммы всех сил, но суммы всех моментов сил относительно любой точки.

2. Угловая скорость – это векторная величина, характеризующая вращение материальной точки относительно оси вращения. Обозначается как $\vec{\omega}$. Если взять начало координат на оси вращения и рассмотреть радиус-вектор материальной точки $\vec{r}$ и вектор её линейной скорости $\vec{v}$, то они будут связаны равенством

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

3. Ротор векторного поля. В математическом анализе (и физике) рассматриваются векторные поля — функции, сопоставляющие каждой точке пространство какой-то вектор. Если $\vec{F}(x, y, z)$ — векторное поле, а $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ — дифференциальный оператор, то ротор векторного поля определяется как

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Векторные произведения векторов правого ортонормированного базиса

Определение

Ортонормированный базис называется *правым*, если векторы базиса образуют правую тройку векторов, и *левым*, если левую.

Утверждение 3.2

Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — правый ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Доказательство. Из условия 1 определения векторного произведения следует, что $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \dfrac{\pi}{2} = 1 = |\vec{k}|$. Поскольку также $\vec{k} \perp \vec{i}$, $\vec{k} \perp \vec{j}$ и тройка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — правая, то $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$. Два других равенства устанавливаются аналогично. $\square$

Далее по умолчанию мы будем считать рассматриваемые ортонормированные базисы правыми.

Критерий коллинеарности векторов на языке векторного произведения

В § 1 был приведен критерий коллинеарности векторов (утверждение 1.7). С помощью векторного произведения можно указать еще одно утверждение такого рода.

Утверждение 3.3 (критерий коллинеарности векторов на языке векторного произведения)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доказательство. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ по определению векторного произведения. Обратно, если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a} \times \vec{b}\,| = 0$, т. е. либо $|\vec{a}\,| = 0$, либо $|\vec{b}\,| = 0$, либо $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Ясно, что в каждом из этих трех случаев $\vec{a} \parallel \vec{b}$. $\square$

Геометрический смысл длины векторного произведения

Следующее утверждение указывает свойство векторного произведения, важное в различных приложениях как в математике, так и за ее пределами.

Утверждение 3.4 (геометрический смысл длины векторного произведения)

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то длина векторного произведения этих векторов равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, построенный на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (при этом $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$), S — площадь этого параллелограмма, h — длина его высоты, опущенной из точки D, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 3.2). Тогда $S = |\vec{a}\,| \cdot h = |\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cdot \sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}\,|$. $\square$

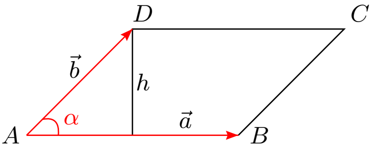

Рис. 3.2. Вычисление площади параллелограмма

Алгебраические свойства векторного произведения (1)

Теорема 3.1 (алгебраические свойства векторного произведения)

Если $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *— произвольные векторы, а* t *— произвольное число, то:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (*антикоммутативность*);
2. $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$ (*числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения*);
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*).

Доказательство. 1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то, в силу второго критерия коллинеарности, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$. Из последнего равенства вытекает, что $-\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Предположим теперь, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Убедимся сначала, что длины векторов, указанных в левой и правой частях доказываемого равенства, равны между собой.

Алгебраические свойства векторного произведения (2)

В самом деле, $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$, и потому

$$|\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{b}\,|\cdot|\vec{a}\,|\cdot\sin(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\,) = |\vec{b}\times\vec{a}\,| = |-\vec{b}\times\vec{a}\,|.$$

Как левая, так и правая части доказываемого равенства ортогональны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\,)$ является правой (по определению векторного произведения), для завершения доказательства равенствосталось убедиться в том, что тройка $(\vec{a},\vec{b},-\vec{b}\times\vec{a}\,)$ также является правой. Заметим, что по определению векторного произведения тройка $(\vec{b},\vec{a},\vec{b}\times\vec{a}\,)$ — правая. Если у последнего вектора сменить знак, мы получим левую тройку $(\vec{b},\vec{a},-\vec{b}\times\vec{a}\,)$. Поскольку перестановка соседних векторов меняет ориентацию тройки, мы получаем, что тройка $(\vec{a},\vec{b},-\vec{b}\times\vec{a}\,)$ — правая.

Свойства 2 и 3 будут доказаны в следующем параграфе. Свойство 4 следует из свойств 1 и 3. В самом деле,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}\,) = -(\vec{b}+\vec{c}\,)\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}\,) = -\vec{b}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}. \qquad \square$$

3.2. Векторное произведение в ортонормированном базисе

Теорема 3.2

Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — правый ортонормированный базис и $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. С учётом утверждений 3.2, 3.3 и теоремы 3.1 имеем
$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) \times (y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}) = x_1y_2 \cdot \vec{i} \times \vec{j} + x_1y_3 \cdot \vec{i} \times \vec{k} +$
$+ x_2y_1 \cdot \vec{j} \times \vec{i} + x_2y_3 \cdot \vec{j} \times \vec{k} + x_3y_1 \cdot \vec{k} \times \vec{i} + x_3y_2 \cdot \vec{k} \times \vec{j} = x_1y_2\vec{k} - x_1y_3\vec{j} - x_2y_1\vec{k} +$
$+ x_2y_3\vec{i} + x_3y_1\vec{j} - x_3y_2\vec{i} = (x_2y_3 - x_3y_1)\vec{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} =$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

Векторное произведение в ортонормированном базисе (2)

Следствия. В обозначениях теоремы 3.2

- Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равна
$$S = \sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}.$$

- $\sin\widehat{(\vec{x},\vec{y})} = \dfrac{\sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$

3.3. Двойное векторное произведение

Определение

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется вектор

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Теорема 3.3 (формула «БАЦ минус ЦАБ»)

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет место равенство

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Доказательство. Пусть $\vec{b} \parallel \vec{c}$. Тогда $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ и $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$. Без ограничения общности пусть $\vec{b} = t\vec{c}$. Тогда
$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = (t\vec{c})(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}(t\vec{c})) = t\vec{c}(\vec{a}\vec{c}) - t\vec{c}(\vec{a}\vec{c}) = \vec{0}$.

Двойное векторное произведение (2)

Пусть теперь $\vec{b} \nparallel \vec{c}$. Выберем в пространстве правый ортонормированный базис следующим образом: $\vec{i}$ — орт вектора $\vec{b}$, $\vec{j}$ — орт вектора $\vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$. В этом базисе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$, $\vec{c} = (c_1, 0, c_3)$. Тогда

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 c_3 \vec{j}.$$

Следовательно,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -b_1 c_3 & 0 \end{vmatrix} = a_3 b_1 c_3 \vec{i} - a_1 b_1 c_3 \vec{k}.$$

Далее, $\vec{a}\vec{c} = a_1 c_1 + a_3 c_3$, $\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1$. Получим
$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = (a_1 c_1 + a_3 c_3) b_1 \vec{i} - a_1 b_1 (c_1 \vec{i} + c_3 \vec{k}) = a_1 b_1 c_1 \vec{i} + a_3 b_1 c_3 \vec{i} -$
$- a_1 b_1 c_1 \vec{i} - a_1 b_1 c_3 \vec{k} = a_3 b_1 c_3 \vec{i} - a_1 b_1 c_3 \vec{k}$. □

Следствие $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$.

Доказательство следствия предлагается проделать самостоятельно в качестве упражнения.

Двойное векторное произведение (3)

Утверждение 3.5 (тождество Якоби)

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполняется тождество

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Доказательство. По теореме 3.3 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) =$
$= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) = \vec{0}$. □

Следствие. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b} + \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Доказательство следствия оставим в качестве упражнения.

Замечания.

- Формула следствия похожа на формулу производной произведения двух функций $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, если ввести обозначение $(\vec{x})' = \vec{x} \times \vec{c}$. Это называется *внутренним дифференцированием*, заданным $\vec{c}$.
- Тождество Якоби вместе с тождеством $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ используется для определения колец и алгебр Ли. Т. е. геометрические векторы относительно операций сложения и векторного произведения образуют кольцо Ли, а вместе с произведением вектора на число — алгебру Ли над полем $\mathbb{R}$.