Часть I. Векторная алгебра

§2. Скалярное произведение векторов

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

2.1. Определение и свойства скалярного произведения

Для определения скалярного произведения нам потребуется понятие угла между векторами.

Определения

Углом между двумя ненулевыми векторами называется наименьший из двух углов, который образуют изображения этих векторов, отложенные от одной точки. Если один или оба вектора нулевые, то угол между ними не определен. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать через $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$ (см. рис. 2.1 на следующем слайде).

Будем говорить, что векторы $\vec{a},\vec{b}$ *перпендикулярны* (или *ортогональны*) и писать $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \dfrac{\pi}{2}$.

Очевидно, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора точки, от которой откладываются векторы. Ясно также, что $0 \leqslant \widehat{(\vec{a},\vec{b})} \leqslant \pi$ и угол между сонаправленными векторами равен 0, а угол между антинаправленными векторами равен π.

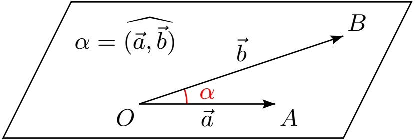

Рис. 2.1. Угол между векторами

Определение

Базис называется *ортонормированным*, если он состоит из попарно перпендикулярных ортов. Традиционное обозначение ортонормированного базиса на плоскости $\vec{i}, \vec{j}$, а в пространстве $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

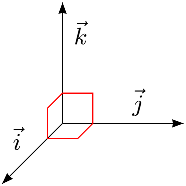

Рис. 2.2. Ортонормированный базис в пространстве

Определения

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

Скалярное произведение в механике и физике

Приведем примеры трёх понятий, которые будут подробно изучены в дальнейшем на курсах физики, теоретической механики и математического анализа.

1. Работа В механике и физике скалярное произведение используют для вычисления работы. Работу даже называют физическим смыслом скалярного произведения. Пусть $\vec{F}$ — вектор силы, а $\vec{s}$ — вектор перемещения. Тогда при постоянной силе и прямолинейном движении материальной точки, работа рассчитывается как

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

2. Дивергенция векторного поля. В математическом анализе (и физике) рассматриваются векторные поля — функции, сопоставляющие каждой точке пространство какой-то вектор. Понятие дивергенции определяет насколько расходится входящее и исходящее поле в малой окрестности данной точки. С точки зрения физики дивергенция является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля.
Если $\vec{F}(x, y, z)$ — векторное поле, а $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ — дифференциальный оператор, то дивергенция векторного поля определяется как

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

3. Оператор Лапласа — дифференциальный оператор, определяемый как

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla.$$

С помощью него удобно записывать уравнения Лапласа ($\Delta\varphi = 0$), Пуассона ($\Delta\varphi = f$) и волновое уравнение. В физике применим в электростатике и электродинамике, квантовой механике, во многих уравнениях физики сплошных сред и т.д.

Алгебраические свойства скалярного произведения

Теорема 2.1 (алгебраические свойства скалярного произведения)

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (коммутативность),
2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивность относительно суммы векторов),
3. $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$ (числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения),
4. $\vec{a}^2 \geqslant 0$, причём $\vec{a}^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство. *1.* Коммутативность очевидна из определения скалярного произведения.

Докажем *4.* Имеем по определению $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2 \geqslant 0$.
Далее, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; |\vec{a}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$.

Для доказательства свойств *2* и *3* нам потребуется понятие ортогональной проекции.

Определение

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Рассмотрим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Опустим перпендикуляр из точки B на прямую (OA) и пусть точка B_1 — основание этого перпендикуляра (см. рис. 2.3).

(Ортогональной) проекцией вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ называется число

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \begin{cases} 0, \text{ если } \overrightarrow{OB_1} = \vec{0}, \\ |\overrightarrow{OB_1}|, \text{ если } \overrightarrow{OB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}, \\ -|\overrightarrow{OB_1}|, \text{ если } \overrightarrow{OB_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OA}. \end{cases}$$

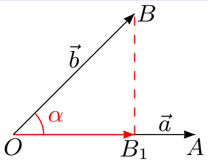

Рис. 2.3. Ортогональная проекция вектора на вектор

Очевидно, что определение проекции не зависит от выбора точки O.

Ортогональная проекция вектора на вектор (1)

Утверждение 2.1

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда пр$_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

Доказательство. Положим $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ (см. рис. 2.3 на предыдущем слайде). Для случая $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ утверждение следует немедленно из $\triangle OBB_1$. Случай $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$ рассматривается аналогично (в этом случае α — угол, смежный с $\angle BOB_1$). Случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$ очевиден. □

Утверждение 2.2

В ортонормированном базисе координаты вектора совпадают с его проекциями на векторы базиса.

Доказательство. Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — ортонормированный базис и $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Разложим $\vec{x}$ по базису, используя процедуру, описанную в доказательстве теоремы 1.6 (см. рис. 2.4 на следующем слайде). Т. е. по построению $DD_1 \parallel OC$, $AD_1 \parallel OB$, $BD_1 \parallel OA$. По теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами $AD \perp OA$, $BD \perp OB$, $DC \perp OC$.

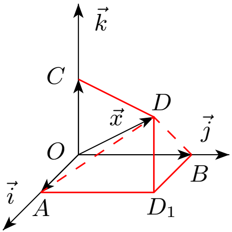

Рис. 2.4.

То есть точки A, B, C получены ортогональным проектированием $\overrightarrow{OD}$ на векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно. Из определения проекции вектора на вектор следует, что $\overrightarrow{OA} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{x})\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{x})\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{x})\vec{k}$. Имеем

$$\vec{x} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{x})\vec{i} + (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{x})\vec{j} + (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{x})\vec{k}.$$

Осталось применить теорему 1.8 о единственности разложения вектора по базису. $\square$

Ортогональная проекция вектора на вектор (3)

Утверждение 2.3 (алгебраические свойства проекции)

Если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то

1. $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$,
2. $\text{пр}_{\vec{c}}(t\vec{a}) = t \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}$.

Доказательство. Рассмоторим ортонормированный базис, в котором первый вектор — орт вектора $\vec{c}$. В таком базисе согласно утверждению 2.2 первая координата любого вектора — это его проекция на $\vec{c}$. Тем самым утверждение 2.3 немедленно следует из свойств теорем 1.9 и 1.10. $\square$

Утверждение 2.4 (выражение скалярного произведения через проекцию)

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Доказательство. По утверждению 2.1 $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$. $\square$

Окончание доказательства теоремы 2.1 Докажем *2.* Если $\vec{c} = \vec{0}$, то очевидно $(\vec{a} + \vec{b})\vec{0} = 0 = \vec{a} \cdot \vec{0} + \vec{b} \cdot \vec{0}$.
Если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}) =$
$= |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b} = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.
Доказательство пункта *3* аналогично (с учётом п. 2 утверждения 2.3). □

Теорема 2.2 (геометрические применения скалярного произведения)

1. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$,
2. $\cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$,
3. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$ (критерий ортогональности векторов),
4. $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ острый $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b} > 0$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ тупой $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b} < 0$,
5. если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Доказательство. *1* — см. доказательство п. 4 теоремы 2.1. *2–4* следуют из определения скалярного произведения. *5* следует из утверждения 2.4. □

Пример (теорема косинусов)

Пример. Рассмотрим $\triangle ABC$ и пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$. Тогда $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Положим также $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ (см. рис. 2.5).

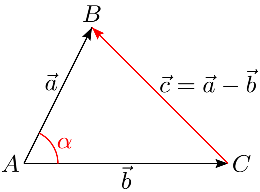

Рис. 2.5

Воспользуемся алгебраическими свойствами скалярного произведения (теорема 2.1):

$$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}\vec{b}.$$

Если положить $a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|$ и использовать теорему 2.2 (п. 1) и определение скалярного произведения, получим

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Мы доказали известную из школьного курса геометрии теорему косинусов.

Ортогональная компонента и ортогональная составляющая

Применим скалярное произведение для нахождения ортогональной компоненты и ортогональной составляющей.

Определение

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x}$. Пусть $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, причем $\vec{y} \parallel \vec{a}$, $\vec{z} \perp \vec{a}$. В этом случае $\vec{y}$ называется *ортогональной компонентой*, а $\vec{z}$ — *ортогональной составляющей* вектора $\vec{x}$ относительно вектора $\vec{a}$.

Утверждение 2.5

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. тогда для любого вектора существуют и единственные ортогональная компонента и ортогональная составляющая относительно $\vec{a}$.

Доказательство. Предположим, что $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \parallel \vec{a}$, $\vec{z} \perp \vec{a}$. Поскольку $\vec{y} \parallel \vec{a}$, то по критерию коллинеарности (утверждение 1.7) $\vec{y} = t\vec{a}$ для некоторого числа t. Умножим равенство $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ скалярно на $\vec{a}$. Получим $\vec{a}\vec{x} = \vec{a}\vec{y} + \vec{a}\vec{z} = \vec{a} \cdot (t\vec{a}) = t\vec{a}^2$. Откуда $t = \dfrac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}^2}$, $\vec{y} = \dfrac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}^2} \cdot \vec{a}$, $\vec{z} = \vec{x} - \dfrac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}^2} \cdot \vec{a}$. $\square$

Следствие. Длина ортогональной компоненты равна модулю проекции.

Слабый закон сокращения для скалярного произведения

Докажем утверждение, которое потребуется нам в дальнейшем.

Заметим, что существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Например, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два различных вектора, а $\vec{c}$ — такой вектор, что $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$. В силу критерия ортогональности векторов $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Тем не менее, имеет место следующее свойство скалярного произведения.

Утверждение 2.6 (слабый закон сокращения для скалярного произведения)

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что для любого вектора $\vec{x}$ выполнено равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ для любого $\vec{x}$. Тогда $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Поскольку вектор $\vec{x}$ может быть любым, возьмем в качестве $\vec{x}$ вектор $\vec{a} - \vec{b}$. Получим равенство $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. В силу свойства 4 скалярного произведения (см. теорему 2.1) отсюда следует, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$. $\square$

2.2. Вычисление скалярного произведения в координатах ортонормированного базиса

Ортонормированный базис удобен для вычисления скалярного произведения в координатах. Действительно, если $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — ортонормированный базис, то из теоремы 2.2 немедленно следует $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$ и $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$. Тем самым имеет место

Теорема 2.3 (формула скалярного произведения в ортонормированном базисе)

Пусть в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ заданы $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Доказательство. В произведении $\vec{x}\vec{y} = (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k})(y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k})$ раскроем скобки. С учетом скалярных произведений векторов ортонормированного базиса получим утверждение теоремы. $\square$

Следствие. $\vec{x}^{2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Геометрические применения скалярного произведения в координатах

Из теорем 2.2 и 2.3 непосредственно получаются формулы для вычислений геометрических величин:

1. $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,
2. $\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$,
3. $\vec{x} \perp \vec{y} \ \Leftrightarrow\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$,
4. $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$ — острый $\ \Leftrightarrow\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 > 0$,
   $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$ — тупой $\ \Leftrightarrow\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 < 0$,
5. если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\text{пр}_{\vec{x}}\vec{y} = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$.

Замечание. Для векторов плоскости скалярное произведение в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ для $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2)$ очевидно вычисляется по формуле

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2,$$

а приведенные выше формулы модифицируются для случая двух координат.

Зафиксируем ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a} = (t_1, t_2, t_3)$. Обозначим через α, β, γ углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно.

Вычислим косинусы этих углов. Имеем $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \dfrac{t_1}{|\vec{a}|}$.Аналогично, $\cos\beta = \dfrac{t_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{t_3}{|\vec{a}|}$. Значит, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{1}{|\vec{a}|}(t_1, t_2, t_3) = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, т. е. орт вектора $\vec{a}$ имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Эта формула показывает, что вектор не может образовывать произвольные углы с векторами ортонормированного базиса.

Определение

Направляющими косинусами вектора относительно ортонормированного базиса называются косинусы углов, образованных данным вектором с векторами этого базиса.

Направляющие косинусы и координаты

Направляющие косинусы, как координаты орта вектора задают его направление. Тем самым углы, которые образует вектор с векторами ортонормированного базиса, однозначно определяют его направление.

А так как любые числа a, b, c, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, являются координатами некоторого орта, получаем следующее

Утверждение 2.7

Ненулевой вектор образует с векторами ортонормированного базиса углы α, β, γ тогда и только тогда, когда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Поскольку знак ненулевой координаты вектора определяется знаком соответствующего направляющего косинуса, получаем такое

Следствие. Угол между вектором и базисным вектором ортонормированного базиса острый (тупой, прямой), если соответствующая координата положительная (отрицательная, нулевая).