Часть I. Векторная алгебра

§1. Линейные операции над векторами

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направленные отрезки (1)

1.1. Понятие вектора

Мы будем опираться на определения и теоремы геометрии, изучаемой в школе. Однако понятие вектора в школе дается наивно и использует интуитивное понимание равенства векторов.
Кроме того, хотелось бы избежать использования «движений» (параллельный перенос, совмещение и т.п.). Строгое определение таких «движений» основано на понятии вектора. Т. е. определять вектор на их основе нельзя.

Определения

Упорядоченная пара точек (A, B) называется *направленным отрезком* и обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Первый элемент такой пары (точка A) называется *началом* направленного отрезка (A, B), а второй элемент пары (точка B) — его *концом*.

Говорят также, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ *отложен от точки* A или *приложен к точке* A.

Направленные отрезки (2)

Если $A \neq B$, то точки A и B определяют отрезок прямой линии AB с концами в этих точках. Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображают на рисунке в виде отрезка AB, отмечая конец направленного отрезка (точку B) стрелкой (см. рисунок 1.1)

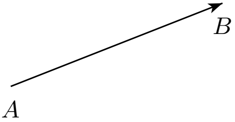


Рис. 1.1

Определения

Если $A = B$, то такой направленный отрезок называется *нулевым*.

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. В частности, длина нулевого направленного отрезка равна 0.

Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* к $\overrightarrow{AB}$.

Направление

В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позже.

Определения

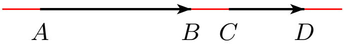
Ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ определяет *направление на прямой (AB)* — луч с началом в точке A, содержащий точку B.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, *определяют одно и то же направление* на этой прямой, если в пересечении лучей получается луч (т.е. «стрелки направлены в одну сторону»); в противном случае $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *определяют* на этой прямой *противоположные направления*.

Сонаправленные отрезки

Определение

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными*, если они либо лежат на одной прямой и определяют на ней одно и то же направление, либо лежат на параллельных прямых и точки B, D лежат по одну сторону от прямой (AC) (см. рис. 1.2).
Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.



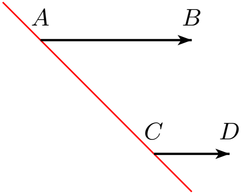


Рис. 1.2

Определение

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *антинаправленными* или *противонаправленными*, если они либо лежат на одной прямой и определяют на ней противоположные направления, либо лежат на параллельных прямых и точки B, D лежат по разные стороны от прямой (AC) (см. рис. 1.3). Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

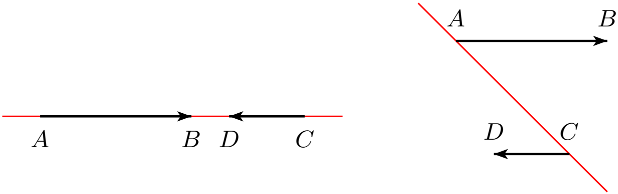


Рис. 1.3

Откладывание направленного отрезка от точки

Рассмотрим ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и точку C.

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то возьмем на этой прямой точку D так, чтобы $|AB| = |CD|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Очевидно, что такая точка существует и единственная.

Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то проведем через точку C прямую, параллельную прямой (AB), а через точку B — прямую, параллельную прямой (AC). На их пересечении получим точку D. По построению четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, так что $|AB| = |CD|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (см. рис. 1.4).

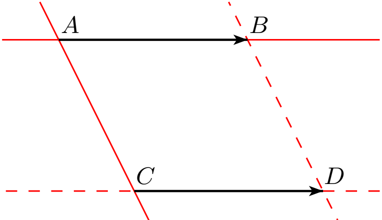


Рис. 1.4

Назовем это построение *откладыванием $\overrightarrow{AB}$ от точки C*

(или *параллельным переносом $\overrightarrow{AB}$ в точку C*).

Утверждения о направлениях

Из определенного на предыдущем слайде построения очевидно следует сппаведливость следующего утверждения:

Утверждение 1.1

Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — два ненулевых направленных отрезка, а M — произвольная точка. Построим $\overrightarrow{MB_1}$ откладываением $\overrightarrow{AB}$ от точки M и $\overrightarrow{MD_1}$ — откладыванием $\overrightarrow{CD}$ от точки M. Тогда

1. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MD_1}$
2. $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MD_1}$

Из этого утверждения, в частности, можно вывести следующее

Утверждение 1.2 (о сонаправленных отрезках)

Если ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ таковы, что $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{CB_1}$ — отложенный от точки C направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{CF_1}$ — отложенный от точки C направленный отрезок $\overrightarrow{EF}$.

Тогда по утверждению 1.1 $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ влечет $\overrightarrow{CB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, а $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$ влечет $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CF_1}$. Значит $\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CF_1}$ определяют одно и то же направление на прямой (CD). Тем самым $\overrightarrow{CB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CF_1}$, откуда по утверждению 1.1 следует $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$. $\square$

Определение

Определим на множестве направленных отрезков бинарное отношение σ следующим образом:

1. Любые нулевые направленные отрезки находятся в отношении σ (т. е. для любых точек A, B имеет место $\overrightarrow{AA} \sigma \overrightarrow{BB}$.
2. Если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — ненулевые, то $\overrightarrow{AB} \sigma \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $|AB| = |CD|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Будем называть отношение σ *отношением равенства направленных отрезков*.

Иногда это отношение называют отношением *эквиполлентности*.

Равенство направленных отрезков (2)

Теорема 1.1

Отношение равенства направленных отрезков σ является отношением эквивалентности.

Доказательство. *Рефлексивность.* Для любого нулевого направленного отрезка $\overrightarrow{AA}\sigma\overrightarrow{AA}$ по определению σ.

Если $\overrightarrow{AB}$ ненулевой, то очевидно, что $|AB| = AB|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{AB}\sigma\overrightarrow{AB}$.

Симметричность. Пусть $\overrightarrow{AB}\sigma\overrightarrow{CD}$.

Если $A = B$, то $C = D$, и по определению σ имеем $\overrightarrow{CD}\sigma\overrightarrow{AB}$.

Если $A \neq B$, то $\overrightarrow{AB}\sigma\overrightarrow{CD}$ влечет $|AB| = |CD|$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, а это дает $\overrightarrow{CD}\sigma\overrightarrow{AB}$

Транзитивность. Пусть $\overrightarrow{AB}\sigma\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}\sigma\overrightarrow{EF}$.

В случае $A = B$ немедленно имеем $C = D, E = F$ и по определению $\overrightarrow{AA}\sigma\overrightarrow{EF}$.

Если $A \neq B$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$, откуда по утверждению 1.2 $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$. Вместе с $|AB| = |CD| = |EF|$ получаем $\overrightarrow{AB}\sigma\overrightarrow{EF}$. $\square$

Понятие вектора (1)

Определения

Вектором называется класс эквивалентности по отношению равенства направленных отрезков.

Класс эквивалентности, состоящий из нулевых направленных отрезков называется *нулевым вектором* и обозначается $\overrightarrow{0}$.

Класс эквивалентности, состоящий из ненулевых направленных отрезков (по сути сонаправленных друг другу направленных отрезков одинаковой длины) обозначается буквой со стрелкой, например $\overrightarrow{a}$.

Длиной вектора называется длина любого его изображения. Обозн.: $|\overrightarrow{a}|$.

Множество всех векторов будем обозначать V_g.

Если $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$, то будем называть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ *изображением вектора* $\overrightarrow{a}$ и, допуская вольность записи, писать $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.

Если $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ — два изображения одного и того же вектора, то вместо $\overrightarrow{AB}\sigma\overrightarrow{CD}$ будем писать $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Понятие вектора (2)

Определения

Говорят, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ *равны*, если они совпадают как классы эквивалентности отношения σ. Обозначение: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

Если $\overrightarrow{AB}$ — изображение вектора $\vec{a}$, то вектор, определяемый изображением $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным к $\vec{a}$ вектором* и обозначается $-\vec{a}$.

Утверждение 1.3

Для любого вектора $\vec{a}$ и любой точки A существует единственное изображение $\overrightarrow{AB}$ вектора $\vec{a}$.

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\overrightarrow{AA}$ — изображение $\vec{0}$.
Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то пусть $\overrightarrow{CD}$ — некоторое изображение $\vec{a}$. Отложим $\overrightarrow{CD}$ от точки A. Полученный направленный отрезок обозначим $\overrightarrow{AB}$. Так как при откладывании мы получаем равные (в смысле σ) направленные отрезки, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{a}$. Единственность очевидна. □

Определения

Взятие изображения $\overrightarrow{AB}$ вектора $\vec{a}$ (которое существует и единственно по утверждению 1.3) будем называть *откладываением вектора $\vec{a}$ от точки A*.

Два вектора называются *сонаправленными* (*антинаправленными* или *противонаправленными*), если у них существуют сонаправленные (соответственно, антинаправленные) изображенния. Обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (соответственно, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Коллинеарные векторы

Напомним, что через V_g — множество всех векторов.

Определения

Вектор $\vec{a}$ называется *коллинеарным* прямой ℓ, если существует изображение вектора $\vec{a}$, лежащее на прямой ℓ. Обозначение: $\vec{a} \parallel \ell$.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая ℓ такая что $\vec{a} \parallel \ell$ и $\vec{b} \parallel \ell$. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Утверждение 1.4

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняется одно (и только одно) из следующих условий: $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Доказательство. Достаточно отложить векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от одной точки. $\square$

Определение

Прямая, проходящая через точку A, от которой отложен вектор $\vec{a}$, коллинеарный этой прямой, называется *осью* вектора $\vec{a}$. Изображение вектора $\vec{a}$ на этой прямой задает *направление оси*.

Компланарные векторы

Определения

Вектор $\vec{a}$ называется *компланарным* плоскости π, если существует изображение вектора $\vec{a}$, лежащее на плоскости π. Обозначение: $\vec{a} \parallel \pi$.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость π такая что $\vec{a} \parallel \pi$, $\vec{b} \parallel \pi$, $\vec{c} \parallel \pi$.

Замечания.

- Три вектора будут компланарны тогда и только тогда, когда их изображения, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости.
- Если два из трех данных векторов коллинеарны, то эти три вектора компланарны.
- Определять понятие компланарности для двух векторов не имеет смысла, так как для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ существует плоскость π такая что $\vec{a} \parallel \pi$ и $\vec{b} \parallel \pi$.

1.2. Сумма векторов

Определение(правило треугольника)

Суммой вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый через $\vec{a}+\vec{b}$ и полученный следующим образом: от произвольной точки A откладываем вектор $\vec{a}$, получаем изображение $\overrightarrow{AB}$. Затем от точки B откладываем вектор $\vec{b}$, получаем изображение $\overrightarrow{BC}$. Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ определяется изображением $\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 1.5.).

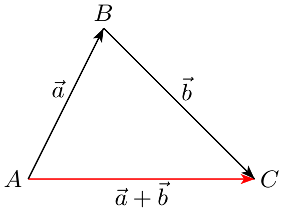


Рис. 1.5. Сумма векторов

Определение суммы векторов нуждается в проверке корректности: выбор точки A не должен влиять на результат.

Рассмотрим одну из возможных ситуаций — точки A, B и C не лежат на одной прямой (см. рис. 1.6).

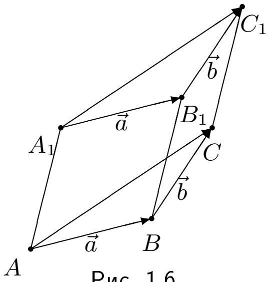


Рис. 1.6

Докажем, что $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ — изображения одного и того же вектора. Для этого достаточно убедиться, что AA_1C_1C — параллелограмм. Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b} = \overrightarrow{B_1C_1}$, параллелограммами будут AA_1B_1B и BB_1C_1C. Поэтому $AA_1 \| BB_1$, $|AA_1| = |BB_1|$ и $CC_1 \| BB_1$, $|CC_1| = |BB_1|$, откуда $AA_1 \| CC_1$ и $|AA_1| = |CC_1|$. Следовательно, AA_1C_1C — параллелограмм, что и требуется доказать.

Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

Алгебраические свойства суммы векторов (1)

Следующая теорема характеризует сумму векторов как алгебраическую операцию.

Теорема 1.2

Множество V_g является коммутативной группой относительно операции сложения векторов, т. е. для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ справедливы равенства

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ($\vec{0}$ — нейтральный элемент);
4. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ($\vec{b} = -\vec{a}$ — противоположный к $\vec{a}$ вектор).

Доказательство. *1.* Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC/}$. ПО определению суммы векторов $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Возьмем $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$. Тогда $\vec{b} + veca = \overrightarrow{BD}$. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой (см. рис. 1.7 на следующем слайде), то $ABDC$ — параллелограмм, откуда следует, что $|AC| = |BD|$ и $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$, т. е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Случай, когда точки A, B, C лежат на одной прямой, рассматривается аналогично.

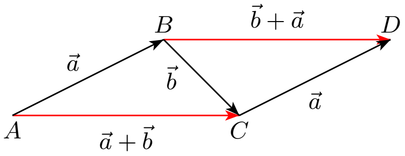


Рис. 1.7

2. Пусть $\vec a=\overrightarrow{AB}$, $\vec b=\overrightarrow{BC}$, $\vec c=\overrightarrow{CD}$. Тогда $\vec a+\vec b=\overrightarrow{AC}$, $(\vec a+\vec b)+\vec c=\overrightarrow{AD}$. С другой стороны $\vec b+\vec c=\overrightarrow{BD}$, $\vec a+(\vec b+\vec c)=\overrightarrow{AD}$, что и требовалось доказать (см. рис. 1.8).

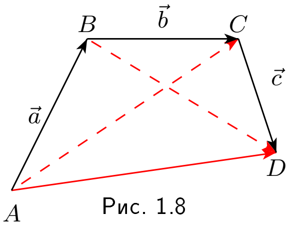


Рис. 1.8

3. Очевидно.
4. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Возьмем $\vec{b} = -\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.
Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. $\square$

Неколлинеарные векторы можно также складывать по следующему правилу, которое очевидно следует из определения суммы векторов:

Утверждение 1.5 (правило параллелограмма)

Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Чтобы построить изображение вектора $\vec{a} + \vec{b}$, следует отложить от любой точки A векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получив изображения $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, затем построить на этих изображениях параллелограмм $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{AC}$ будет изображением вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 1.9).

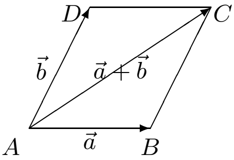


Рис. 1.9

Алгебраические свойства суммы векторов (4)

Из определения суммы векторов по правилу треугольника очевидно выводится

Следствие (правило многоугольника)

Чтобы сложить несколько векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ нужно построить изображения $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\ldots$, $\vec{a}_m = \overrightarrow{A_{m-1}A_m}$.
Тогда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_m = \overrightarrow{A_0A_m}$ (см. рис. 1.10).

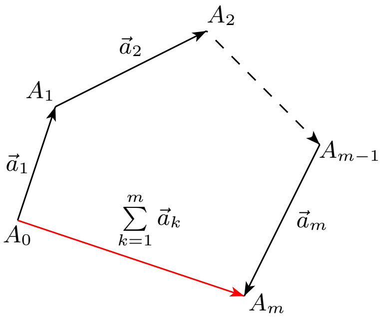


Рис. 1.10

Замкнутость относительно суммы

Замечания.

- Множество векторов, коллинеарных одной и той же прямой, замкнуто относительно суммы векторов.
- Множество векторов, компланарных одной и той же плоскости, замкнуто относительно суммы векторов.

1.3. Произведение вектора на число

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

1. $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$, в частности, если $t = 0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;
2. если $t > 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$;
3. если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Очевидно, что определение произведения вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на число t определено однозначно и не зависит от выбора точки приложения A.

Теорема 1.3 (алгебраические свойства произведения вектора на число)

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа, то:

1. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (*дистрибутивность отн. сложения векторов*);
2. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (*дистрибутивность относительно сложения чисел*);
3. $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$ (своего рода *ассоциативность*);
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (*особая роль единицы*). $\square$

Доказательство. *1.* Случай $t = 0$ очевиден.
Пусть теперь $t > 0$. Возьмем $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Отложим от точки A вектор $t\vec{a} = \overrightarrow{AB_1}$, а от точки B_1 вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$.
Так как $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, то $t(\vec{a} + \vec{b}) = t \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC_1} = t\vec{a} + t\vec{b}$ (см. рис. 1.11).

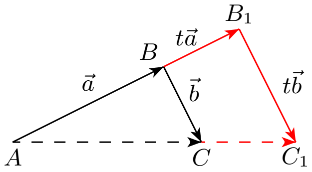


Рис. 1.11

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

2, 3, 4. Очевидно следуют из определения произведения вектора на число. □

Следствие

Противоположный вектору $\vec{a}$ вектор $-\vec{a}$ равен $(-1) \cdot \vec{a}$.

Орт вектора

Определение

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор. *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

При решении некоторых задач возникает необходимость найти орт данного вектора. В следующем утверждении указано, как это можно сделать.

Утверждение 1.6

Если — ненулевой вектор, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.

Доказательство. Поскольку $\dfrac{1}{|\vec{a}\,|} > 0$, из определения произведения вектора на число имеем $\vec{a} \uparrow\uparrow \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|}$ и $\left|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|}\right| = \left|\dfrac{1}{|\vec{a}\,|}\right| \cdot |\vec{a}\,| = \dfrac{1}{|\vec{a}\,|} \cdot |\vec{a}\,| = 1$.

Следовательно, вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|}$ действительно является ортом вектора $\vec{a}$. $\square$

Критерий коллинеарности векторов

Утверждение 1.7 (критерий коллинеарности векторов)

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.

Доказательство. *Достаточность* непосредственно вытекает из определения произведения вектора на число.

Необходимость. Для $\vec{a} = \vec{0}$ очевидно $(t = 0)$.
Для $\vec{a} \neq \vec{0}$ и т. к. $|\vec{b}\,| \neq 0$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$ влечет либо $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, либо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Положим

$$t = \begin{cases} \frac{|\vec{a}\,|}{|\vec{b}\,|}, & \text{если } \vec{a} \upuparrows \vec{b}, \\ -\frac{|\vec{a}\,|}{|\vec{b}\,|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $t > 0$, и потому $t\vec{b} \upuparrows \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Таким образом, в любом случае векторы $\vec{a}$ и $t\vec{b}$ сонаправленны. Кроме того,

$$|t\vec{b}\,| = |t| \cdot |\vec{b}\,| = \frac{|\vec{a}\,|}{|\vec{b}\,|} \cdot |\vec{b}\,| = |\vec{a}\,|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$.

1.4 Линейная зависимость векторов

Определения

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $t_1, \ldots, t_n$ называется вектор

$$t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n.$$

Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $t_1, \ldots, t_n$ не все равные 0 такие, что

$$t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*.

Утверждение 1.8

Если векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимы, то

$$t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \ldots = t_n = 0.$$

Свойства линейно зависимых и независимых систем векторов

Доказательство. От противного, если какой-то из коэффициентов линейной комбинации отличен от 0, то это бы означало линейную зависимость векторов системы. □

Здесь и далее термин *система векторов* означает конечное множество векторов. Очевидно, имеет место

Утверждение 1.9 (свойства линейно зависимых и независимых систем)

1. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.
2. Система векторов, содержащая $\vec{0}$ линейно зависима.
3. Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Определение

Если имеет место равенство $\vec{b} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n$, то говорят, что *вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$*.

Утверждение 1.10 (критерий линейной зависимости)

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через остальные.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. Тогда существуют $t_1, \ldots, t_n$ не все равные 0 такие, что $t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Без ограничения общности, пусть $t_1 \neq 0$. Получим

$$\vec{a}_1 = -\frac{t_2}{t_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{t_n}{t_1}\vec{a}_n.$$

Достаточность. Если без ограничения общности $\vec{a}_1 = t_2\vec{a}_2 + \ldots \vec{a}_n$, то $1 \cdot \vec{a}_1 - t_2\vec{a}_2 - t_n\vec{a}_n = \vec{0}$, то есть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. □

Геометрическая интерпретация линейной зависимости (1)

Теорема 1.4

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство. Очевидно из критериев коллинеарности (утверждение 1.7) и линейной зависимости (утверждение 1.10). □

Теорема 1.5

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. *Необходимость*. Если три вектора линейно зависимы, то по критерию линейной зависимости (утверждение 1.10) один из них линейно выражается через остальные два, но тогда по определению линейных операций он лежит с ними в одной плоскости.

Достаточность. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то по теореме 1.4 они линейно зависимы, и по утверждению 1.9, свойство 1, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

Геометрическая интерпретация линейной зависимости (2)

Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то рассмотрим изображения $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Проведем прямую (CA_1) параллельно прямой (OB) и прямую (CB_1) параллельно прямой (OA) (см. рис. 1.12).

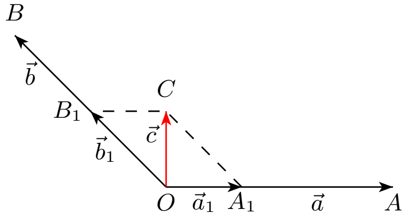


Рис. 1.12

Имеем $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1} = t\overrightarrow{OA} = t\vec{a}$ для некоторого t, $\vec{b}_1 = \overrightarrow{OB_1} = s\overrightarrow{OB} = s\vec{b}$ для некоторого s, $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 = t\vec{a} + s\vec{b}$, тем самым. по утверждению 1.10 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы. □

Теорема 1.6

Любые четыре вектора линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные четыре вектора. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, и, следовательно, линейно зависимы, то вся четверка векторов линейно зависима по утверждению 1.9.
Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, то проведем построение (см. рис. 1.13), аналогичное построению в доказательстве теоремы 1.5.

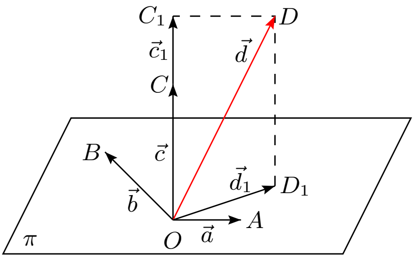


Рис. 1.13

Прямая (DD_1) параллельна прямой (CO), плоскость π однозначно определяется $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. По теореме 1.5 $\vec{d}_1 = t\vec{a} + s\vec{b}$ для некоторых t и s. Кроме того, $\vec{c}_1 = r\vec{c}$ для некоторого r. Далее, $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{c}_1 = t\vec{a} + s\vec{b} + r\vec{c}$, т. е. $\vec{d}$ линейно выражается через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а значит все четыре вектора линейно зависимы по утверждению 1.10. □

1.5. Базис и координаты

Определение

Упорядоченная система векторов называется *базисом*, если она линейно независима и любой вектор линейно выражается через векторы этой системы.

В силу теорем 1.4—1.6 справедлива

Теорема 1.7

- На прямой базис образует любой ненулевой вектор.
- На плоскости базис образуют любые два неколлинеарных вектора.
- В пространстве базис образуют любые три некомпланарных вектора.

Определение

Если $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ — базис, то любой $\vec{x}$ линейно выражается через векторы базиса, т. е. $\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n$. Такое выражение называется *разложением вектора $\vec{x}$ по базису $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$*.

Координаты (1)

Теорема 1.8 (о единственности разложения вектора по базису)

Пусть $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ — базис. Тогда для любого вектора $\vec{x}$ существуют и единственные $t_1, \ldots, t_n$ такие, что

$$\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n.$$

Доказательство. Существование очевидно по определению базиса. Докажем едиственность.
Пусть $\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n$ и $\vec{x} = s_1\vec{a}_1 + \ldots + s_n\vec{a}_n$ — два разложения.
Вычитая из первого равенства второе, получим
$\vec{0} = (t_1 - s_1)\vec{a}_1 + \ldots + (t_n - s_n)\vec{a}_n$. В силу линейной независимости векторов базиса по утверждению 1.8 все скобки равны 0, т. е. $t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n$. □

Определение

Пусть $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ — базис и $\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n$. Упорядоченный набор чисел $(t_1, \ldots, t_n)$ называется *координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$*.

Координаты (2)

Определение

Если обозначить базис как $a = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, то тот факт, что $\vec{x}$ имеет в этом базисе координаты $(t_1, \ldots, t_n)$ будем записывать так:

$$\vec{x} = (t_1, \ldots, t_n)_a.$$

Понятно, что в разных базисах один и тот же вектор будет иметь разные координаты. Однако, когда из контекста понятно, о каком базисе идет речь, индекс базиса можно опускать.

Теорема 1.9 (о координатах суммы векторов)

При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. Пусть в базисе $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ имеет место $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

Доказательство. Из $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{a}_1 + \ldots + y_n\vec{a}_n$ имеем $\vec{x}+\vec{y} = x_1\vec{a}_1+\ldots+x_n\vec{a}_n+y_1\vec{a}_1+\ldots+y_n\vec{a}_n = (x_1+y_1)\vec{a}_1+\ldots+(x_n+y_n)\vec{a}_n$. $\square$

Координаты (3)

Теорема 1.10 (о координатах вектора, умноженного на число)

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.
Пусть в базисе $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ имеет место $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $t\vec{x} = (tx_1, \ldots, tx_n)$.

Доказательство. Из $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ получаем
$\vec{x} = t(x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n) = (tx_1)\vec{a}_1 + \ldots + (tx_n)\vec{a}_n$. $\square$

Из этой теоремы и критерия коллинеарности векторов (утверждение 1.7) немедленно следует

Утверждение 1.11 (координатный критерий коллинеарности векторов)

Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. Пусть в базисе $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ имеет место $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда $\vec{x} \parallel \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x_1}{y_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{y_n}$.

В этой записи пропорции допускается 0 в знаменателе, но это означает, что и числитель тоже равен 0, т. е. $y_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$.