Предварительные сведения

Определители второго и третьего порядков

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

0.1. Определители второго порядка

Мы будем опираться на понятие матрицы, которое уже известно из курса алгебры.

Определение

Определителем квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

второго порядка (или просто *определителем второго порядка*) называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Другие обозначения определителя: $|A|$ или $det\, A$.

Иными словами,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали минус произведение элементов на побочной диагонали.*

Определители возникли в теории систем линейных уравнений. Рассмотрим применение определителей второго порядка к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

- Определитель Δ_i (при $i = 1, 2$) получается из Δ заменой i-го столбца Δ на столбец свободных членов.

Напомним определения основной и расширенной матриц систем из курса алгебры.

Определения

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы (1), называется *основной матрицей* этой системы. Определитель этой матрицы (т. е. определитель Δ) называется *определителем системы* (1).

Теорема Крамера для систем второго порядка (1)

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 0.1 (теорема Крамера для систем второго порядка)

Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Эта теорема является частным случаем теоремы Крамера для систем n линейных уравнений с n неизвестными при любом $n \in \mathbb{N}$. Доказательство теоремы Крамера в общем случае дается в курсе линейной алгебры. Здесь мы докажем ее только что сформулированный частный случай.

Доказательство. *Существование.* Докажем, что наша система имеет по крайней мере одно решение. Подставим $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ вместо x_1 и $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ вместо x_2 в первое уравнение системы. Получим

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11}(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + a_{12}(a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_{11} b_1 a_{22} - a_{11} b_2 a_{12} + a_{12} a_{11} b_2 - a_{12} a_{21} b_1}{\Delta} =$$

$$= \frac{b_1(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}{\Delta} = \frac{b_1 \cdot \Delta}{\Delta} = b_1.$$

Теорема Крамера для систем второго порядка (2)

Итак, пара чисел $(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta})$ — решение первого уравнения системы (1). Аналогично проверяется, что она также и решение второго. Мы доказали, что решение системы (1) существует. Осталось доказать его единственность.

Единственность. Пусть (x_1^0, x_2^0) — решение системы (1), т. е. справедливы равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 = b_2. \end{cases} \tag{2}$$

Умножим первое из этих равенств на a_{22}, второе на $-a_{12}$, и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$a_{11}a_{22}x_1^0 + a_{12}a_{22}x_2^0 - a_{21}a_{12}x_1^0 - a_{22}a_{12}x_2^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

т. е. $\Delta \cdot x_1^0 = \Delta_1$. Поскольку $\Delta \neq 0$, имеем $x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично получим, что $\Delta \cdot x_2^0 = \Delta_2$, откуда $x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Мы взяли произвольное решение (x_1^0, x_2^0) системы (1) и доказали, что оно совпадает с решением $(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta})$. Это означает, что решение единственно. Теорема доказана. □

0.2. Определители третьего порядка

Определение

Определителем квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка (или просто *определителем третьего порядка*) называется

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Другие обозначения: $|A|$ или $\det\ A$.

Определители третьего порядка (2)

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко.

Далее мы укажем правило, позволяющее ее запомнить.

Заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы.

На рис. 1 на следующем слайде изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка.

Элементы матрицы изображены точками.

Линии в обоих определителях соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом слева соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а справа — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

Правило треугольников

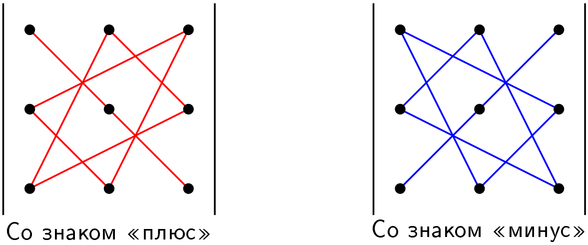

Рис. 1. Правило треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

Правило треугольников

Со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Определители третьего порядка можно применять для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными подобно тому, как определители второго порядка применяются для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера для систем третьего порядка

Определения

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы (3), называется *основной матрицей* этой системы. Определитель этой матрицы (т. е. определитель Δ) называется *определителем системы* (3).

- определитель Δ_i (при $i = 1, 2, 3$) получается из определителя Δ заменой i-го столбца основной матрицы системы на столбец свободных членов.

Следующая теорема аналогична доказанной выше теореме 0.1.

Теорема 0.2 (теорема Крамера для систем третьего порядка)

Если $\Delta \neq 0$, *то система* (3) *имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам* $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$. □

Мы не будем доказывать эту теорему, поскольку она, как и теорема 0.1, является частным случаем теоремы Крамера, которая доказывается в курсе линейной алгебры.

Разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу (1)

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка и $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Обозначим через M_{ij} определитель квадратной матрицы второго порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы A i-й строки и j-го столбца, и положим $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Число A_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Справедлив следующий факт, который сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению трех определителей второго порядка.

Предложение 0.1 (разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу)

Определитель квадратной матрицы третьего порядка равен сумме произведений элементов произвольной ее строки [произвольного ее столбца] на их алгебраические дополнения.

Разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу (2)

В частности,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Это равенство называется *разложением определителя третьего порядка по первой строке*. Докажем его. Отталкиваясь от определения определителя третьего порядка, имеем

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Формулы разложения определителя третьего порядка по двум другим строкам и по всем столбцам записываются и доказываются аналогично. В качестве примера, напишем формулу разложения определителя третьего порядка по второму столбцу:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$