§ 16. Прямолинейные образующие квадрик в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

16.1. Квадрики, содержащие и не содержащие прямолинейные образующие

Определение

Прямая, целиком лежащая на поверхности, называется *прямолинейной образующей* этой поверхности.

Прямолинейные образующие по определению имеют цилиндрические и конические поверхности, в частности, эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры и конус (см. § 13). В § 14 фактически отмечалось (без использования введенного только что термина), что прямолинейные образующие есть у однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Несложно проверяется (см. следующие два слайда), что все остальные «невырожденные» квадрики в пространстве, т. е. эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид, прямолинейных образующих не имеют. Основная цель этого параграфа — указать некоторые свойства и способ нахождения уравнений прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Отсутствие прямолинейных образующих у эллипсоида, двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида (1)

Замечание 16.1

Эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид не содержат прямолинейных образующих.

Доказательство. Рассмотрим эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид, которые заданы своими каноническими уравнениями. Эллипсоид не имеет прямолинейных образующих, потому что он целиком расположен внутри параллелипипеда, задаваемого неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ и $|z| \leqslant c$.

Перейдем к двуполостному гиперболоиду. Если прямая параллельна плоскости xOy, то она лежит в плоскости, задаваемой уравнением $z = h$ для некоторого h. Но, как мы видели в § 14, сечение двуполостного гиперболоида плоскостью вида $z = h$, является либо эллипсом, либо точкой, либо пустым множеством. В любом случае это сечение не содержит никакой прямой. Если же прямая либо пересекает плоскость xOy, либо лежит в ней, то она не может лежать на нашем гиперболоиде, так как он не пересекает указанную плоскость. Отметим, что вместо Oxy здесь можно рассматривать любую плоскость, заданную уравнением $z = r$, где $|r| < c$.

Отсутствие прямолинейных образующих у эллипсоида, двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида (2)

Аналогично проверяется отсутствие прямолинейных образующих у эллиптического параболоида (надо только вместо xOy рассмотреть произвольную плоскость, заданную уравнением $z = r$, где $r < 0$). $\square$

16.2. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

Теорема 16.1

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.

Доказательство. Напомним, что однополостный гиперболоид задается в подходящей системе координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит однополостному гиперболоиду, заданному уравнением (1), а прямая ℓ, проходящая через эту точку, является прямолинейной образующей этого гиперболоида. Запишем параметрические уравнения прямой ℓ:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt. \end{cases} \qquad (2)$$

Число прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, проходящих через данную точку (2)

Положим

$$X = \tfrac{x}{a}, Y = \tfrac{y}{b}, Z = \tfrac{z}{c}, X_0 = \tfrac{x_0}{a}, Y_0 = \tfrac{y_0}{b}, Z_0 = \tfrac{z_0}{c}, \\ P = \tfrac{p}{a}, Q = \tfrac{q}{b}, R = \tfrac{r}{c}. \tag{3}$$

В этих обозначениях уравнение гиперболоида принимает вид

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1, \tag{4}$$

а уравнения прямой ℓ — вид

$$\begin{cases} X &= X_0 + Pt, \\ Y &= Y_0 + Qt, \\ Z &= Z_0 + Rt. \end{cases} \tag{5}$$

Напомним, что вектор $\vec{a} = (p, q, r)$ является направляющим вектором прямой ℓ. Если $r \neq 0$, то R также отлично от 0, и разделив вектор $\vec{a}$ на R, мы получим направляющий вектор прямой ℓ, третья координата которого равна c. Поскольку нам не важно, координаты какого именно из направляющих векторов прямой ℓ стоят в правых частях уравнений (2), в дальнейшем можно считать, что либо $r = 0$, либо $r = c$, т. е. либо $R = 0$, либо $R = 1$.

Подставим правые части уравнений (5) в уравнение (4). Получим

$$(X_0 + Pt)^2 + (Y_0 + Qt)^2 - (Z_0 + Rt)^2 = 1. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2 = 1, \tag{7}$$

поскольку точка M_0 лежит на гиперболоиде. Вычтем равенство (7) из равенства (6). После очевидных преобразований, получим

$$(P^2 + Q^2 - R^2)t^2 + 2(X_0 P + Y_0 Q - Z_0 R)t = 0.$$

Поскольку все точки прямой ℓ лежат на гиперболоиде, последнее равенство должно выполняться для любого t. Это возможно лишь в случае, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} P^2 + Q^2 - R^2 = 0, \\ X_0 P + Y_0 Q - Z_0 R = 0. \end{cases}$$

Первое из этих равенств показывает, что если $R = 0$, то $P = Q = 0$, и потому $p = q = r = 0$. Но это невозможно, поскольку вектор $\vec{a}$, будучи направляющим вектором прямой, не может быть нулевым. В силу сказанного выше можно считать, что $R = 1$.

Число прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, проходящих через данную точку (4)

Следовательно,

$$\begin{cases} P^2 + Q^2 = 1, \\ X_0 P + Y_0 Q = Z_0. \end{cases} \tag{8}$$

Из уравнения (7) видно, что случай, когда $X_0 = Y_0 = 0$, невозможен. Следовательно, либо $X_0 \neq 0$, либо $Y_0 \neq 0$. Будем далее считать, что $Y_0 \neq 0$ (случай, когда $X_0 \neq 0$, разбирается вполне аналогично и приводит к тем же самым результатам). Из второго из уравнений (8) имеем $Q = \frac{Z_0 - X_0 P}{Y_0}$. Подставив правую часть последнего равенства вместо Q в первое из уравнений (8), мы после очевидных преобразований получим следующее квадратное уравнение относительно P:

$$\left(1 + \frac{X_0^2}{Y_0^2}\right)P^2 - \frac{2X_0 Z_0}{Y_0^2} \cdot P + \frac{Z_0^2}{Y_0^2} - 1 = 0.$$

Умножив обе части уравнения на Y_0^2, получим:

$$(X_0^2 + Y_0^2)P^2 - 2X_0 Z_0 P + Z_0^2 - Y_0^2 = 0. \tag{9}$$

Подсчитаем дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части этого уравнения.

Используя равенство (7), получим:

$$\begin{aligned} D &= 4X_0^2 Z_0^2 - 4(X_0^2 + Y_0^2)(Z_0^2 - Y_0^2) = \\ &= 4(X_0^2 Z_0^2 - X_0^2 Z_0^2 + X_0^2 Y_0^2 - Y_0^2 Z_0^2 + Y_0^4) = \\ &= 4(X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2) Y_0^2 = \\ &= 4Y_0^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (9) имеет два различных решения. Это означает, что направляющий вектор прямой ℓ можно выбрать двумя способами, т. е. через точку M_0 проходит ровно две прямолинейных образующих нашего гиперболоида. $\square$

Продолжим рассуждения, начатые в доказательстве теоремы 16.1, для того, чтобы вывести уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Решим уравнение (9), используя формулу для корней квадратного уравнения с четным коэффициентом при первой степени неизвестного:

$$P = \frac{X_0 Z_0 \pm Y_0}{X_0^2 + Y_0^2}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{Z_0 - X_0 P}{Y_0} = \frac{Z_0 - \frac{(X_0 Z_0 \pm Y_0) X_0}{X_0^2 + Y_0^2}}{Y_0} = \frac{X_0^2 Z_0 + Y_0^2 Z_0 - X_0^2 Z_0 \mp X_0 Y_0}{Y_0 (X_0^2 + Y_0^2)} = \frac{Y_0 Z_0 \mp X_0}{X_0^2 + Y_0^2}.$$

Напомним, что $R = 1$.

Параметрические уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (2)

Используя формулы (3), получаем, что параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\frac{x_0 z_0}{ac} + \varepsilon \cdot \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot at, \\ y = y_0 + \dfrac{\frac{y_0 z_0}{bc} - \varepsilon \cdot \frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \qquad (10)$$

где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Для того, чтобы упростить эти уравнения, нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Эллипс, получающийся при сечении однополостного гиперболоида, заданного уравнением (1), плоскостью xOy, называется *горловым эллипсом* этого гиперболоида (см. рис. 1 на следующем слайде).

Горловой эллипс

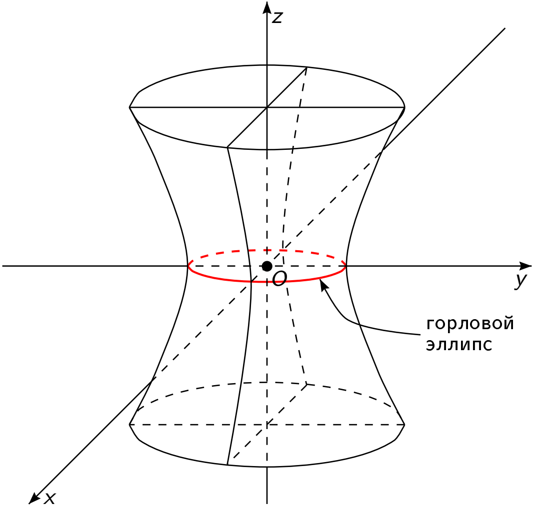

Рис. 1. Горловой эллипс

Параметрические уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (3)

Если в уравнениях (10) положить $t = -\frac{z_0}{c}$, то мы получим $z = 0$. Таким образом, точка прямой ℓ, соответствующая указанному значению параметра t, лежит в плоскости xOy. Поскольку прямая ℓ лежит на гиперболоиде, эта точка принадлежит горловому эллипсу. Мы видим, что справедливо следующее

Замечание 16.2

Всякая прямолинейная образующая однополостного гиперболоида пересекает его горловой эллипс. □

Возьмем точку прямой ℓ, принадежащую горловому эллипсу, в качестве точки M_0. Тогда $z_0 = 0$. Поскольку точка M_0 принадлежит гиперболоиду, отсюда вытекает, что

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Два семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

Учитывая уравнения (10), мы получаем, что уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку M_0, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{ay_0}{b} t, \\ y = y_0 - \frac{bx_0}{a} t, \\ z = ct \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{ay_0}{b} t, \\ y = y_0 + \frac{bx_0}{a} t, \\ z = ct. \end{cases} \tag{13}$$

Поскольку горловой эллипс содержит бесконечно много точек, уравнения вида (12) и (13) задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Из доказательства теоремы 16.1 вытекает

Замечание 16.3

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямолинейной образующей из каждого семейства. □

Взаимное расположение прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (1)

Две точки, лежащие на эллипсе, называются *диаметрально противоположными*, если прямая, их соединяющая, проходит через центр эллипса.

Теорема 16.2

Любые две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида из одного семейства скрещиваются. Две прямолинейные образующие из разных семейств параллельны, если они проходят через диаметрально противоположные точки горлового эллипса, и пересекаются в противном случае.

Доказательство. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — различные прямолинейные образующие из одного семейства, проходящие через точки горлового эллипса $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ соответственно. Для определенности будем считать, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 принадлежат семейству, задаваемому уравнениями вида (12) (для семейства, задаваемого уравнениями вида (13) доказательство аналогично). Уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 можно записать так:

$$\ell_1 : \quad \frac{x - x_1}{ay_1/b} = \frac{y - y_1}{-bx_1/a} = \frac{z}{c}, \qquad \ell_2 : \quad \frac{x - x_2}{ay_2/b} = \frac{y - y_2}{-bx_2/a} = \frac{z}{c}.$$

Взаимное расположение прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (2)

Поскольку точки M_1 и M_2 различны, по крайней мере одно из чисел $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ отлично от нуля. С учетом этого, имеем

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ \frac{ay_2}{b} & -\frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\left(-\frac{bcx_1}{a} + \frac{bcx_2}{a}\right) - (y_2 - y_1)\left(\frac{acy_1}{b} - \frac{acy_2}{b}\right) =$$

$$= \frac{bc}{a}(x_2 - x_1)^2 + \frac{ac}{b}(y_2 - y_1)^2 \neq 0.$$

В силу теоремы 8.3 это означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются.

Пусть теперь ℓ_1 и ℓ_2 — прямолинейные образующие из разных семейств, проходящие через лежащие на горловом эллипсе точки $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ соответственно. С учетом (12) и (13), их уравнения можно записать так:

$$\ell_1: \quad \frac{x - x_1}{ay_1/b} = \frac{y - y_1}{-bx_1/a} = \frac{z}{c}, \qquad \ell_2: \quad \frac{x - x_2}{-ay_2/b} = \frac{y - y_2}{bx_2/a} = \frac{z}{c}.$$

Учитывая, что точки M_1 и M_2 лежат на гиперболоиде, получаем, что $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.

Взаимное расположение прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (3)

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ -\frac{ay_2}{b} & \frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\left(-\frac{bcx_1}{a} - \frac{bcx_2}{a}\right) - (y_2 - y_1)\left(\frac{acy_1}{b} + \frac{acy_2}{b}\right) =$$

$$= \frac{bc}{a}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{ac}{b}(y_1^2 - y_2^2) =$$

$$= abc\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) - abc\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) = abc - abc = 0.$$

В силу теоремы 8.3 это означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости. Ясно, что они параллельны, если их направляющие векторы пропорциональны, и пересекаются в противном случае. Направляющими векторами прямых ℓ_1 и ℓ_2 являются векторы $\vec{s}_1 = \left(\frac{ay_1}{b}, -\frac{bx_1}{a}, c\right)$ и $\vec{s}_2 = \left(\frac{-ay_2}{b}, \frac{bx_2}{a}, c\right)$ соответственно. Следовательно, эти векторы пропорциональны тогда и только тогда, когда $-\frac{y_1}{y_2} = -\frac{x_1}{x_2} = 1$, т. е. когда $x_2 = -x_1$ и $y_2 = -y_1$. Поскольку прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекают горловой эллипс в точках $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ соответственно, получаем, что ℓ_1 и ℓ_2 параллельны, если точки M_1 и M_2 диаметрально противоположны, и пересекаются в противном случае.

Общие уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (1)

Выше мы нашли параметрические уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Но для того, чтобы их написать, надо знать координаты хотя бы одной точки, лежащей на этой поверхности. Покажем, как можно найти общие уравнения этих прямых, не имея этой информации.

Уравнение (1) можно переписать в виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$ или

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right). \qquad (14)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta(1 + \frac{y}{b}), \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \alpha(1 - \frac{y}{b}), \end{cases} \qquad (15)$$

где α и β — действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля. Каждое из уравнений этой системы задает плоскость. Главные векторы этих плоскостей равны $(\frac{\alpha}{a}, -\frac{\beta}{b}, -\frac{\alpha}{c})$ и $(\frac{\beta}{a}, \frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c})$ соответственно. Если эти векторы пропорциональны, то $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, откуда $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ вопреки выбору чисел α и β. Это значит, что плоскости пересекаются (см. теорему 7.2).

Общие уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (2)

Следовательно, геометрический образ системы (15) — прямая.

Если $\alpha, \beta \neq 0$, то, почленно перемножив уравнения системы (15) и сократив на $\alpha\beta$, получим уравнение (14). Если $\beta = 0$, а $\alpha \neq 0$, то система (15) равносильна совокупности уравнений $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$, $y = b$. Очевидно, что если координаты точки удовлетворяют этим двум уравнениям, то они удовлетворяют и уравнениям (14). Легко проверить, что то же верно и в случае, когда $\beta \neq 0$, а $\alpha = 0$. Таким образом, в любом случае прямая, задаваемая уравнениями (15), лежит на однополостном гиперболоиде, т. е. является его прямолинейной образующей.

Аналогично проверяется, что система уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta(1 - \frac{y}{b}), \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \alpha(1 + \frac{y}{b}), \end{cases} \qquad (16)$$

где α и β — действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля, также задает прямолинейную образующую однополостного гиперболоида.

Системы (15) и (16) задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. При этом семейство прямолинейных образующих, задаваемое системой (15), совпадает с семейством, задаваемым уравнениями (12), а семейство, задаваемое системой (16), — с семейством, задаваемым уравнениями (13). Доказательство этого факта мы опускаем.

16.3. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида

Перейдем к прямолинейным образующим гиперболического параболоида. Их свойства во многом аналогичны свойствам прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Напомним, что гиперболический параболоид задается уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{17}$$

Теорема 16.3

Через каждую точку гиперболического параболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит гиперболическому параболоиду, заданному уравнением (17), а прямая ℓ, проходящая через точку M_0, является прямолинейной образующей этого параболоида. Пусть параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид (2). Положим

$$X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}, Z = z, X_0 = \frac{x_0}{a}, Y_0 = \frac{y_0}{b}, Z_0 = z_0, P = \frac{p}{a}, Q = \frac{q}{b} \text{ и } R = r.$$

Число прямолинейных образующих гиперболического параболоида, проходящих через данную точку (2)

В этих обозначениях уравнение параболоида принимает вид

$$X^2 - Y^2 = 2Z, \tag{18}$$

а уравнения прямой ℓ — вид (5). Если $q \neq 0$, то, разделив вектор $\vec{a} = (p, q, r)$ на Q, мы получим направляющий вектор прямой ℓ, вторая координата которого равна b. Поскольку нам не важно, координаты какого именно из направляющих векторов прямой ℓ стоят в правых частях уравнений (2), в дальнейшем можно считать, что либо $q = 0$, либо $q = b$, т. е. либо $Q = 0$, либо $Q = 1$. Подставим правые части уравнений (5) в уравнение (18). Получим

$$(X_0 + Pt)^2 - (Y_0 + Qt)^2 = 2(Z_0 + Rt). \tag{19}$$

С другой стороны,

$$X_0^2 - Y_0^2 = 2Z_0, \tag{20}$$

поскольку точка M_0 лежит на параболоиде. Вычтем равенство (20) из равенства (19). После очевидных преобразований, получим

$$(P^2 - Q^2)t^2 + 2(X_0 P - Y_0 Q - R)t = 0.$$

Поскольку все точки прямой ℓ лежат на параболоиде, последнее равенство должно выполняться для любого t.

Это возможно лишь в случае, когда

$$\begin{cases} P^2 - Q^2 = 0, \\ X_0 P - Y_0 Q - R = 0. \end{cases}$$

Если $Q = 0$, то первое из этих равенств показывает, что $P = 0$, но тогда и $R = 0$ в силу второго равенства. В этом случае $p = q = r = 0$. Но это невозможно, поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$. В силу сказанного выше, можно считать, что $Q = 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} P^2 = 1, \\ X_0 P - Y_0 = R. \end{cases} \tag{21}$$

Первое из этих уравнений показывает, что $P = \pm 1$. Из второго уравнения системы (21) вытекает теперь, что $R = \pm X_0 - Y_0$. Следовательно, $p = \pm a$, $q = b$ и $r = \pm\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$. Таким образом, направляющий вектор прямой ℓ может быть выбран двумя способами: $\vec{a}_1 = (a, b, \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b})$ и $\vec{a}_2 = (-a, b, -\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b})$. Следовательно, через точку M_0 проходят ровно две прямолинейных образующих. $\square$

Параметрические уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида

Прежде чем формулировать еще одну теорему о свойствах прямолинейных образующих гиперболического параболоида, заметим, что, в силу сказанного выше, уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку M_0, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)t \end{cases} \tag{22}$$

и

$$\begin{cases} x = x_0 - at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + \left(-\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)t. \end{cases} \tag{23}$$

Уравнения вида (22) и (23) задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Из доказательства теоремы 16.3 вытекает

Замечание 16.4

Через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной прямолинейной образующей из каждого семейства. □

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1)

Теорема 16.4

Любые две прямолинейные образующие гиперболического параболоида из разных семейств пересекаются. Любые две прямолинейные образующие из одного семейства скрещиваются.

Доказательство. Рассмотрим прямые

$$\ell_1 : \ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ \frac{x - x_2}{-a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{-\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b}}$$

из различных семейств прямолинейных образующих. Направляющие векторы этих прямых не коллинеарны, так как $\frac{a}{-a} \neq \frac{b}{b}$. Поэтому для того, чтобы проверить, что они пересекаются, достаточно убедиться в том, что они лежат в одной плоскости.

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (2)

В самом деле, учитывая, что точки с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) лежат на параболоиде, и потому $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 2z_1$ и $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 2z_2$, имеем

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} \\ -a & b & -\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\Big(-\frac{b}{a} \cdot x_2 - y_2 - \frac{b}{a} \cdot x_1 + y_1\Big) -$$

$$- (y_2 - y_1)\Big(-x_2 - \frac{a}{b} \cdot y_2 + x_1 - \frac{a}{b} \cdot y_1\Big) +$$

$$+ (z_2 - z_1) \cdot 2ab =$$

$$= \frac{b}{a}(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) -$$

$$- \frac{a}{b}(y_1^2 - y_2^2) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + 2ab(z_2 - z_1) =$$

$$= ab\Big(\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} + 2z_2 - 2z_1\Big) =$$

$$= ab\Big(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 2z_1\Big) - ab\Big(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 2z_2\Big) =$$

$$= ab \cdot 0 - ab \cdot 0 = 0 - 0 = 0.$$

В силу теоремы 8.3 прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости.

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (3)

Пусть теперь ℓ_1 и ℓ_2 — различные прямолинейные образующие из одного семейства. Для определенности будем считать, что эти прямые принадлежат семейству, задаваемому уравнениями вида (22) (для семейства, задаваемого уравнениями вида (23), доказательство аналогично). Полагая в (22) $t = -\frac{x_0}{a}$, получаем $x = 0$. Таким образом, каждая прямолинейная образующая из нашего семейства проходит через точку с абсциссой 0. Пусть $M_1(0, y_1, z_1)$ и $M_2(0, y_2, z_2)$ — точки, лежащие на прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. В качестве направляющих векторов прямых ℓ_1 и ℓ_2 можно взять векторы $\vec{s}_1 = (a, b, -\frac{y_1}{b})$ и $\vec{s}_2 = (a, b, -\frac{y_2}{b})$ соответственно. В силу теоремы 8.3 достаточно показать, что

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & -\frac{y_1}{b} \\ a & b & -\frac{y_2}{b} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{24}$$

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (4)

Имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & -\frac{y_1}{b} \\ a & b & -\frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = -(y_2 - y_1)\left(-\frac{ay_2}{b} + \frac{ay_1}{b}\right) + (z_2 - z_1)(ab - ab) = \frac{a(y_1 - y_2)^2}{b}.$$

Если $y_1 \neq y_2$, то неравенство (24) выполнено. Предположим теперь, что $y_1 = y_2$. Учитывая, что точки M_1 и M_2 лежат на гиперболоиде, получаем, что $\frac{0}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 2z_1$ и $\frac{0}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 2z_2$, откуда $z_1 = -\frac{y_1^2}{2b^2} = z_2$. Следовательно, точки M_1 и M_2 совпадают. Кроме того, в этом случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 имеют один и тот же направляющий вектор, а именно, — вектор $\left(a, b, -\frac{y_1}{b}\right)$. Но это значит, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 совпадают вопреки их выбору. $\square$

Как и в случае однополостного гиперболоида, можно указать общие уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида, для написания которых надо знать только уравнение параболоида и не надо знать координаты точки, принадлежащей ему.

Пусть гиперболический параболоид задан уравнением (17). Легко проверяется, что системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2\beta, \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = \alpha z, \end{cases} \tag{25}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$, и

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = \beta z, \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2\alpha, \end{cases} \tag{26}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$, задают прямые, лежащие на нашем параболоиде. Убедимся в этом на примере системы (25) (для системы (26) доказательство аналогично).

Плоскости, задаваемые первым и вторым из уравнений (25), имеют главные векторы $\vec{n}_1 = (\frac{\alpha}{b}, -\frac{\alpha}{b}, 0)$ и $\vec{n}_2 = (\frac{\beta}{a}, \frac{\beta}{b}, -\alpha)$. Если $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, то, приравнивая отношения первых и третьих координат этих векторов, имеем $\alpha = 0$ вопреки сказанному выше.

Общие уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида (2)

Следовательно, $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$. Это означает, что плоскости, задаваемые первым и вторым из уравнений (25), пересекаются (см. теорему 7.2), и потому уравнения (25) задают прямую. Если $\beta \neq 0$, то, почленно перемножив уравнения системы (25) и сократив на $\alpha\beta$, получим уравнение (17). Если же $\beta = 0$, то система (25) равносильна совокупности уравнений $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$ (напомним, что $\alpha \neq 0$). Очевидно, что из этих равенств вытекает уравнение (17).

Системы (25) и (26) при указанных ограничениях на α и β задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида. При этом семейство прямолинейных образующих, задаваемое системой (25), совпадает с семейством, задаваемым уравнениями (22), а семейство, задаваемое системой (26), — с семейством, задаваемым уравнениями (23). Доказательство этого факта мы опускаем.