§ 15. Классификация квадрик в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Квадрикой в пространстве (или *поверхностью второго порядка*) называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют *уравнению 2-го порядка с тремя неизвестными*, т. е. уравнению вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \ &+\ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+\ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}$ и a_{23} отличен от нуля.

Примеры квадрик в пространстве (1)

Примерами квадрик в пространстве являются эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Рассмотрим еще несколько уравнений вида (1) и выясним, какие квадрики они задают.

Примеры квадрик в пространстве (2)

1. $x^2 - y^2 = 0$. Это уравнение задает *пару пересекающихся плоскостей* с уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$.
2. $x^2 - 1 = 0$. Это уравнение задает *пару параллельных плоскостей* с уравнениями $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$.
3. $x^2 = 0$. Это уравнение, очевидно, равносильно уравнению $x = 0$ и потому задает плоскость. В теории квадрик в пространстве квадрику такого типа принято называть *парой совпавших плоскостей*. Этот термин объясняется так же, как термин «пара совпавших прямых» в теории квадрик на плоскости (см. §12).
4. $x^2 + y^2 = 0$. Это уравнение равносильно равенствам $x = y = 0$ и потому задает в пространстве *прямую* (ось аппликат).
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Это уравнение равносильно равенствам $x = y = z = 0$ и потому задает в пространстве *точку* (начало координат).
6. $x^2 + 1 = 0$. Точек, координаты которых удовлетворяли бы этому уравнению, не существует. Поэтому его геометрическим образом является *пустое множество*.

Классификационная теорема

Оказывается, что никаких других квадрик, кроме упомянутых на двух предыдущих слайдах, не существует. А именно, справедлива следующая

Теорема 15.1

Всякая квадрика в пространстве является или цилиндром (эллиптическим, гиперболическим или параболическим), или конусом, или эллипсоидом, или гиперболоидом (однополостным или двуполостным), или параболоидом (эллиптическим или параболическим), или парой плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпавших), или прямой, или точкой, или пустым множеством.

Для того, чтобы дать полное доказательство этой теоремы, необходимы некоторые понятия и теоремы из курса линейной алгебры. Поэтому мы примем без доказательства следующее утверждение и будем доказывать теорему 15.1 «по модулю» этого утверждения.

Предложение 15.1

Для произвольной квадрики в пространстве существует система координат, в которой эта квадрика имеет уравнение вида (1) такое, что $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, *а по крайней мере один из коэффициентов* a_{11}, a_{22} *и* a_{33} *отличен от нуля.* □

Доказательство классификационной теоремы: редукция к трем случаям (1)

Доказательство теоремы 15.1. Пусть в системе координат $Oxyz$ квадрика σ задается уравнением (1). В силу предложения 15.1 можно считать, что это уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \tag{2}$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22} и a_{33} отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Выделив полный квадрат по x, получим равенство

$$a_{11} \cdot \left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_2y + 2a_3z + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$. Сделав замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases}$$

(геометрически ей соответствует сдвиг вдоль оси Ox), мы получим уравнение $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_2y' + 2a_3z' + a_0' = 0$, не содержащее линейного слагаемого по x. Аналогично, если $a_{22} \neq 0$ [соответственно $a_{33} \neq 0$], то сдвигом вдоль оси Oy [соответственно Oz] можно избавиться от линейного слагаемого по y [соответственно по z].

Доказательство классификационной теоремы: редукция к трем случаям (2)

Таким образом, можно считать, что если в уравнении (2) отличен от нуля коэффициент при квадрате некоторой неизвестной, то в нем нет линейного слагаемого по той же неизвестной.

Если в (2) все три коэффициента при квадратах неизвестных отличны от 0, то мы пришли к уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0, \text{ где } A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0. \tag{3}$$

Если в (2) отличны от 0 ровно два коэффициента при квадратах неизвестных, то, сделав при необходимости соответствующую замену неизвестных, мы получим уравнение вида

$$Ex^2 + Fy^2 + 2Gz + H = 0, \text{ где } E \neq 0, F \neq 0. \tag{4}$$

Предположим, наконец, что в (2) отличен от 0 ровно один коэффициент при квадрате неизвестной. Можно считать, что этим коэффициентом является a_{22} (в противном случае можно сделать соответствующую замену неизвестных). Таким образом, уравнение квадрики имеет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_3z + a_0 = 0, \tag{5}$$

где $a_{22} \neq 0$.

Доказательство классификационной теоремы: редукция к трем случаям (3)

Если $a_3 = 0$, мы пришли к уравнению вида

$$Ky^2 + 2Lx + M = 0, \text{ где } K \neq 0. \tag{6}$$

Если $a_1 = 0$, то мы придем к тому же результату, «переименовав» x в z, а z в x. Пусть, наконец, $a_1 \neq 0$ и $a_3 \neq 0$. Сделаем следующую замену неизвестных:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha, \\ y = y', \\ z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha. \end{cases} \tag{7}$$

Как показывают формулы (8) из § 5, эта замена соответствует повороту на угол α вокруг оси Oy. Подставив правые части равенств (7) вместо x, y и z в (5) и проведя необходимые преобразования, получим уравнение

$$a_{22}(y')^2 + 2(a_1\cos\alpha + a_3\sin\alpha)x' + 2(-a_1\sin\alpha + a_3\cos\alpha)z' + a_0 = 0,$$

где по-прежнему $a_{22} \neq 0$. Выбрав в качестве α решение уравнения $-a_1\sin\alpha + a_3\cos\alpha = 0$ (или, что эквивалентно, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_1}{a_3}$), мы получим уравнение вида (6).

Доказательство классификационной теоремы: редукция к трем случаям (4)

- Для того, чтобы применить формулы (7) при решении конкретных задач, нам надо найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Поскольку значение $\operatorname{ctg}\alpha$ известно, для этого надо использовать формулу $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. Это позволит найти два возможных значения для $\sin\alpha$. Выбрав любое из них, можно найти $\cos\alpha$ по формуле $\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Итак, мы можем считать, что квадрика σ задается одним из уравнений (3), (4) и (6). Дальнейшие рассмотрения разбиваются на три случая.

Случай 1: квадрика задается уравнением вида (3). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 1.1: $D \neq 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-D/A} + \frac{y^2}{-D/B} + \frac{z^2}{-D/C} = 1. \tag{8}$$

Возможны четыре варианта.

а) $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C} > 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим каноническое уравнение эллипсоида.

б) Среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ есть два положительных и одно отрицательное. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{D}{A} > 0$, $-\frac{D}{B} > 0$ и $-\frac{D}{C} < 0$ (в противном случае следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{\frac{D}{C}}$, мы получим каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

в) Среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ есть одно положительное и два отрицательных. Можно считать, что первые два из них отрицательны, а третье положительно (в противном случае, как и ранее, следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим уравнение $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Умножив его на -1, получим каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.

г) $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C} < 0$. В этом случае уравнение (8) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 1.2: $D = 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/B} + \frac{z^2}{1/C} = 0. \qquad (9)$$

Возможны два варианта.

а) Числа $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{C}$ имеют один и тот же знак. В этом случае уравнение (9) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и потому его геометрическим образом является точка (начало координат).

б) Среди чисел $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{C}$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Умножив, если потребуется, уравнение (9) на -1, можно добиться того, чтобы среди этих чисел было два положительных и одно отрицательное. Более того, можно считать, что $\frac{1}{A} > 0$, $\frac{1}{B} > 0$ и $\frac{1}{C} < 0$ (в противном случае, как обычно, следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{1}{C}}$, мы получим каноническое уравнение конуса.

Случай 2: квадрика задается уравнением вида (4). Здесь возможны три подслучая.

Подслучай 2.1: $G \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$Ex^2 + Fy^2 = -2Gz - H = -2G\left(z + \frac{H}{2G}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x &, \\ y' = y &, \\ z' = z + \frac{H}{2G}, \end{cases}$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси Oz. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $E(x')^2 + F(y')^2 = -2Gz'$ или

$$\frac{(x')^2}{-G/E} + \frac{(y')^2}{-G/F} = 2z'. \tag{10}$$

Доказательство классификационной теоремы: случай 2 (2)

Возможны два варианта.

а) Числа $-\frac{G}{E}$ и $-\frac{G}{F}$ имеют одинаковый знак. Если оба этих числа отрицательны, то, умножив уравнение (10) на -1, а затем сделав замену неизвестных $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = -z'$, мы придем к уравнению того же вида, в котором $-\frac{G}{E} > 0$ и $-\frac{G}{F} > 0$. Поэтому можно сразу считать, что выполнены два последних неравенства. Можно считать также, что $-\frac{G}{E} \geqslant -\frac{G}{F}$ (в противном случае можно переименовать x' в y', а y' в x'). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{G}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{G}{F}}$, мы получим каноническое уравнение эллиптического параболоида.

б) Числа $-\frac{G}{E}$ и $-\frac{G}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{G}{E} > 0$ и $-\frac{G}{F} < 0$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x'' = y'$, $y'' = x'$, $z'' = z'$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{G}{E}}$, $b = \sqrt{\frac{G}{F}}$, мы получим каноническое уравнение гиперболического параболоида.

Подслучай 2.2: $G = 0$, $H \neq 0$. В этом случае уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-H/E} + \frac{y^2}{-H/F} = 1. \tag{11}$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{H}{E}, -\frac{H}{F} > 0$. Можно считать, что $-\frac{H}{E} \geqslant -\frac{H}{F}$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{H}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{H}{F}}$, мы получим каноническое уравнение эллиптического цилиндра.

б) Числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{H}{E} > 0$ и $-\frac{H}{F} < 0$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{H}{E}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{F}}$, мы получим каноническое уравнение гиперболического цилиндра.

в) $-\frac{H}{E}, -\frac{H}{F} < 0$. В этом случае уравнение (11) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 2.3: $G = H = 0$. В этом случае уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/E} + \frac{y^2}{1/F} = 0. \tag{12}$$

Возможны два варианта.

а) Числа $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{F}$ имеют одинаковые знаки. Ясно, что в этом случае решениями уравнения (12) являются тройки чисел вида $(0, 0, z)$ (где z — любое число) и только они. Следовательно, это уравнение задает прямую (ось Oz).

б) Числа $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{F}$ имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, наше уравнение на -1, можно прийти к ситуации, когда $\frac{1}{E} > 0$ и $\frac{1}{F} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{1}{F}}$, мы получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ или $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) \cdot (\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 0$. Геометрическим образом последнего уравнения является совокупность плоскостей $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Очевидно, что главные векторы этих плоскостей, т. е. векторы $\vec{n}_1 = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0)$ и $\vec{n}_2 = (\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, 0)$, не пропорциональны. Следовательно, эти плоскости пересекаются (см. теорему 7.2). Итак, в рассматриваемом случае квадрика есть пара пересекающихся плоскостей.

Случай 3: квадрика задается уравнением вида (6). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 3.1: $L \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (6) в виде

$$y^2 = -\frac{2L}{K}x - \frac{M}{K} = -\frac{2L}{K}\left(x + \frac{M}{2L}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{M}{2L}, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases}$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси Ox. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $(y')^2 = -\frac{2L}{K}x'$. Полагая $p = -\frac{L}{K}$, получим уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, оно является каноническим уравнением параболического цилиндра. Если же $p < 0$, то мы придем к тому же результату после замены неизвестных $x'' = -x'$, $y'' = y'$, $z'' = z'$.

Подслучай 3.2: $L = 0$. Уравнение (6) в этом случае можно переписать в виде

$$y^2 = -\frac{M}{K}. \tag{13}$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{M}{K} > 0$. Полагая $a = \sqrt{-\frac{M}{K}}$, мы получим уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является пара параллельных плоскостей $y = a$ и $y = -a$.

б) $-\frac{M}{K} = 0$. В этом случае уравнение (13), очевидно, эквивалентно уравнению $y = 0$, которое задает пару совпавших плоскостей.

в) $-\frac{M}{K} < 0$. В этом случае уравнение (13) не имеет решений и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Мы завершили разбор всех возможных случаев и подслучаев. Как видим, в процессе этого разбора возникли все пятнадцать видов квадрик, упомянутых в формулировке теоремы, и не возникло никаких других. Теорема полностью доказана. $\square$