Часть IV. Квадрики в пространстве

§ 13. Цилиндрические и конические поверхности

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Оставшиеся четыре параграфа нашего курса посвящены квадрикам в пространстве, т. е. поверхностям, которые задаются уравнениями второго порядка. В данном параграфе вводятся в рассмотрение два широких класса поверхностей, указанных в названии параграфа. Оба этих класса содержат далеко не только поверхности второго порядка. В каждом из них мы указываем некоторые конкретные поверхности второго порядка (три цилиндрические и одну коническую).

13.1. Цилиндрические поверхности

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и ненулевой вектор $\vec{a}$. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки кривой ℓ и коллинеарными вектору $\vec{a}$, называется *цилиндрической*. Кривая ℓ называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а упомянутые выше прямые — ее *образующими*.

Общий вид цилиндрической поверхности изображен на рис. 1 на следующем слайде.

Пусть σ — цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}$, а μ — плоскость, неколлинеарная $\vec{a}$ и пересекающая σ по некоторой кривой s. Очевидно, что σ совпадает с цилиндрической поверхностью, направляющей которой является s, а образующие параллельны $\vec{a}$ (см. рис. 2 через один слайд). Кривая s, очевидно, является плоской. Таким образом, справедливо следующее

Замечание 13.1

Любая цилиндрическая поверхность имеет направляющую, являющуюся плоской кривой. $\square$

Общий вид цилиндрической поверхности

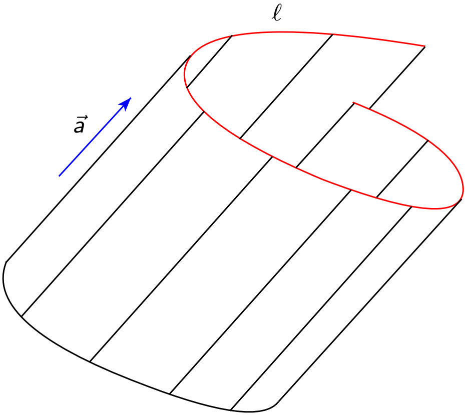

Рис. 1. Произвольная цилиндрическая поверхность

Выбор плоской направляющей для цилиндрической поверхности

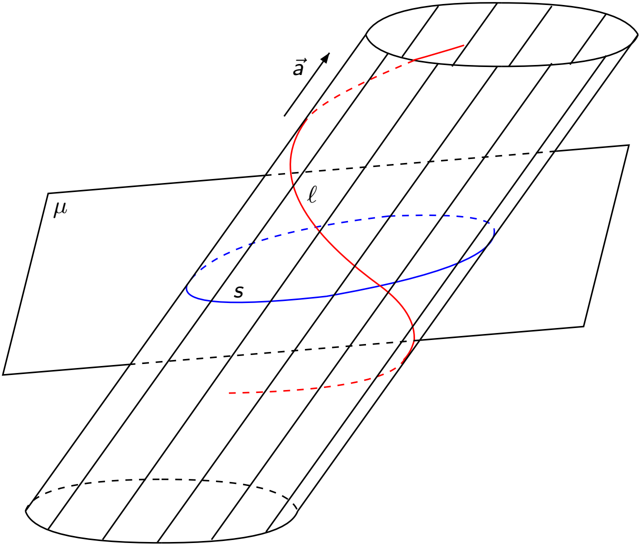

Рис. 2. Сечение цилиндрической поверхности плоскостью

Общее уравнение цилиндрической поверхности (1)

Следующая теорема показывает, как выглядит общее уравнение произвольной цилиндрической поверхности в подходящей системе координат.

Теорема 13.1

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат общим уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — произвольная функция от двух переменных, задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть σ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}$. Обозначим через m произвольную прямую, коллинеарную вектору $\vec{a}$, а через O — произвольную точку на этой прямой. Возьмем точку O в качестве начала координат. Далее, проведем через точку O плоскость π, перпендикулярную к прямой m, и выберем в этой плоскости произвольный базис, векторы которого обозначим через $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Посмотрим, как выглядит уравнение поверхности σ в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$. Обозначим через ℓ кривую, по которой плоскость π пересекает поверхность σ. Ясно, что ℓ — плоская кривая, являющаяся направляющей поверхности σ. Эта кривая задается в плоскости π некоторым общим уравнением $F(x, y) = 0$.

Пусть $M \in \sigma$. Обозначим координаты точки M через (x_0, y_0, z_0). Существует точка $M' \in \ell$ такая, что прямая MM' коллинеарна $\vec{a}$. Ясно, что точка M' имеет координаты $(x_0, y_0, 0)$. Поскольку $M' \in \ell$, получаем, что $F(x_0, y_0) = 0$. Итак, координаты любой точки, лежащей на поверхности σ, удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

Пусть теперь точка M с координатами (x_0, y_0, z_0) не лежит на σ. Проведем через M прямую, коллинеарную $\vec{a}$, и обозначим через M'' точку пересечения этой прямой с плоскостью Oxy. Ясно, что точка M'' имеет координаты $(x_0, y_0, 0)$. Поскольку $M \notin \sigma$, получаем, что $M'' \notin \ell$. Следовательно, $F(x_0, y_0) \neq 0$. Таким образом, точка пространства принадлежит σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Предположим, что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через ℓ пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Произвольная точка пространства M лежит на σ тогда и только тогда, когда координаты ее проекции на плоскость Oxy (при проектировании вдоль оси Oz) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Следовательно, σ — цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ, образующие которой коллинеарны вектору $\vec{a}$.

Цилиндрические квадрики

Теорема 13.1 показывает, что канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, рассматриваемые как уравнения поверхностей, задают в пространстве цилиндрические поверхности. Укажем названия этих поверхностей.

Определения

Эллиптическим цилиндром называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a \geqslant b > 0$. *Гиперболическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a, b > 0$. *Параболическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида $y^2 = 2px$, где $p > 0$. Каждое из этих трех уравнений называется *каноническим уравнением* той поверхности, которую оно задает.

«Внешний вид» эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров указан на рис. 3, 4 и 5 соответственно (см. следующие три слайда).

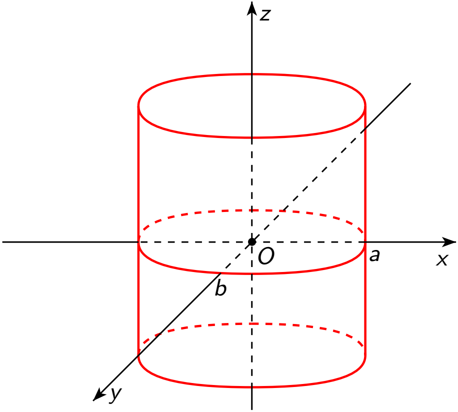

Рис. 3. Эллиптический цилиндр

Гиперболический цилиндр

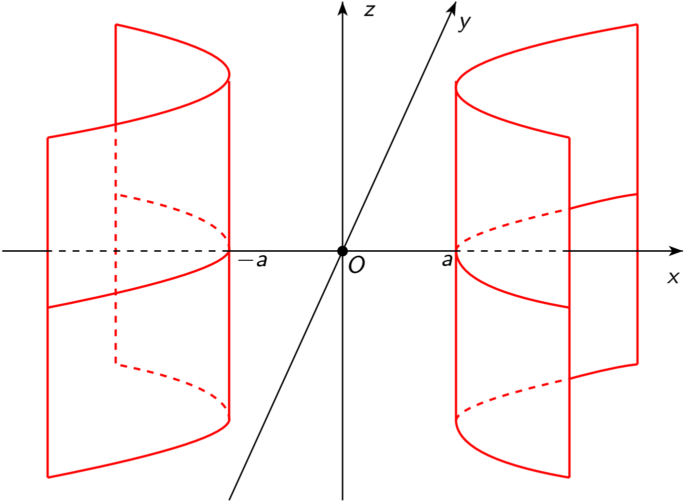

Рис. 4. Гиперболический цилиндр

Параболический цилиндр

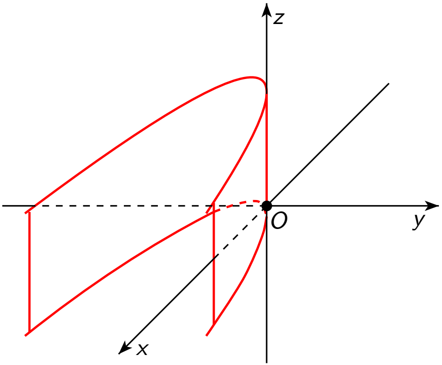

Рис. 5. Параболический цилиндр

13.2. Конические поверхности

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и точка P, не лежащая на ℓ. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через точку P и всевозможные точки кривой ℓ, называется *коничecкой*. Кривая ℓ называется *направляющей* конической поверхности, упомянутые выше прямые — ее *образующими*, а точка P — ее *вершиной*.

Общий вид конической поверхности изображен на рис. 6 на следующем слайде.

Класс конических поверхностей (как и класс цилиндрических поверхностей) весьма обширен, поскольку в качестве ℓ можно брать *произвольную* кривую в пространстве. В дальнейшем нас будет интересовать лишь одна поверхность из этого класса, определение которой дано на слайде, следующем после слайда с рис. 6.

Общий вид конической поверхности

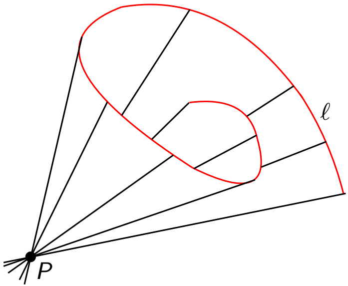

Рис. 6. Произвольная коническая поверхность

Определение

Конусом называется называется коническая поверхность у которой, в некоторой системе координат, вершина совпадает с началом координат, а направляющая задается уравнениями вида

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c, \end{cases} \tag{1}$$

где $a \geqslant b > 0$, а $c \neq 0$.

В частности, направляющей конуса является эллипс.

Из определения конуса никоим образом не вытекает, что он является квадрикой в пространстве. Докажем, что это так.

Теорема 13.2

Пусть в некоторой системе координат вершина конуса совпадает с началом координат, а направляющая задается уравнениями вида (1)*. Тогда в этой системе координат конус задается уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть σ — конус с вершиной в начале координат и направляющей (1). Предположим, что точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этому конусу. Докажем, что ее координаты удовлетворяют уравнению (2). Ясно, что координаты вершины конуса (т. е. начала координат) удовлетворяют этому уравнению. Предположим поэтому, что точка M отлична от вершины конуса. Обозначим начало координат через O. Прямая OM имеет уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Легко понять, что точка пересечения образующей OM и плоскости $z = c$ имеет координаты $\left(\frac{cx_0}{z_0}, \frac{cy_0}{z_0}, c\right)$. Подставив их в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получим равенство $\frac{c^2 x_0^2}{z_0^2 a^2} + \frac{c^2 y_0^2}{z_0^2 b^2} = 1$, откуда вытекает равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}. \qquad (3)$$

Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению (2). Мы показали, что если точка принадлежит конусу σ, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2).

Предположим теперь, что $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (2). Докажем, что $M \in \sigma$. В силу выбора точки M ее координаты удовлетворяют равенству (3). Если $z_0 = 0$, то $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0$, откуда $x_0 = y_0 = 0$. Но тогда M — начало координат, и потому $M \in \sigma$. Пусть теперь $z_0 \neq 0$. Рассмотрим точку $M'\left(\frac{x_0 c}{z_0}, \frac{y_0 c}{z_0}, c\right)$. Точка M' принадлежит направляющей (1). В самом деле, ее третья координата равна c, а из равенства (3) вытекает, что

$$\frac{x_0^2 c^2}{z_0^2 a^2} + \frac{y_0^2 c^2}{z_0^2 b^2} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \cdot \frac{c^2}{z_0^2} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} = 1.$$

Поэтому осталось проверить, что точка M принадлежит прямой OM'. В самом деле, эта прямая имеет уравнения

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 c}{z_0} \cdot t, \\ y = \frac{y_0 c}{z_0} \cdot t, \\ z = ct. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения $\frac{z_0}{c}$ вместо t, имеем $x = x_0$, $y = y_0$ и $z = z_0$. Следовательно, $M \in OM'$. Таким образом, если кординаты точки M удовлетворяют уравнению (2), то $M \in \sigma$. Объединяя это с доказанным на предыдущем слайде, получаем, что конус σ задается этим уравнением. $\square$

Из определения конуса видно, что он имеет вид, указанный на рис. 7.

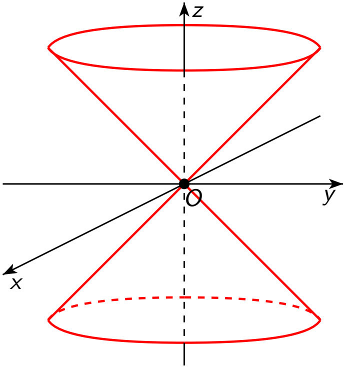

Рис. 7. Конус