§ 12. Классификация квадрик на плоскости

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,

Институт естественных наук и математики,

кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Квадрикой на плоскости (или *кривой второго порядка*) называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют *уравнению 2-го порядка с двумя неизвестными*, т. е. уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{1}$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Примеры квадрик на плоскости

Примерами квадрик на плоскости являются кривые, рассмотренные в трех предыдущих параграфах, — эллипс, гипербола и парабола. Рассмотрим еще несколько уравнений вида (1) и выясним, какие квадрики они задают.

1) $x^2 - y^2 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $(x - y)(x + y) = 0$ и потому задает *пару пересекающихся прямых* с уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$.
2) $x^2 - 1 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $(x - 1)(x + 1) = 0$ и потому задает *пару параллельных прямых* с уравнениями $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$.
3) $x^2 = 0$. Это уравнение, очевидно, равносильно уравнению $x = 0$ и потому задает на плоскости прямую. В теории квадрик на плоскости квадрику такого типа принято называть *парой совпавших прямых*. Этот термин объясняется следующими соображениями. Рассмотрим пару параллельных прямых $x = \pm a$, где $a > 0$, задаваемую уравнением $x^2 = a^2$. Если $a \longrightarrow 0$, то прямые $x = a$ и $x = -a$ «сближаются» и в пределе, при $a = 0$, совпадают друг с другом.

Еще три уравнения второго порядка указаны на следующем слайде.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, где $a, b > 0$. Эта квадрика называется *мнимым эллипсом*. Ясно, что геометрическим образом мнимого эллипса является пустое множество.

5) $x^2 + a^2 = 0$, где $a > 0$. Эта квадрика называется *парой мнимых параллельных прямых*. Ее геометрическим образом также является пустое множество.

6) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$, где $a, b > 0$. Эта квадрика называется *парой мнимых пересекающихся прямых*. Ее геометрическим образом является *точка* (начало координат).

Названия двух последних квадрик объясняются тем, что уравнение первой из них можно записать в виде $(x + ai)(x - ai) = 0$, а уравнение второй — в виде $(ax + biy)(ax - biy) = 0$ (в обоих случаях i — мнимая единица).

Классификационная теорема

Оказывается, что никаких других квадрик, кроме упомянутых на двух предыдущих слайдах, не существует. А именно, справедлива следующая

Теорема 12.1

Всякая квадрика на плоскости является или эллипсом (обычным или мнимым), или гиперболой, или параболой, или парой прямых (пересекающихся, параллельных или совпавших), или парой мнимых прямых (пересекающихся или параллельных).

Доказательство этой теоремы весьма длинное. Отметим, однако, что это доказательство несложно по своей сути (оно сводится к простым вычислениям и перебору большого числа возникающих при этом случаев). Еще более важно то, что это доказательство конструктивно: в нем, по сути дела, изложен алгоритм, следуя которому можно определить тип квадрики, заданной произвольным уравнением вида (1), и найти систему координат, в которой уравнение этой квадрики имеет наиболее простой вид. Последнее обстоятельство особенно ценно с точки зрения решения задач.

- Приведение уравнения произвольной квадрики к простейшему виду, описываемое в доказательстве теоремы 12.1, принято называть *приведением квадрики к каноническому виду*.

Доказательство. Пусть в системе координат Oxy квадрика ℓ задается уравнением (1). Разобьем дальнейшие рассуждения на три шага.

Шаг 1. Проверим прежде всего, что систему Oxy можно повернуть вокруг точки O на некоторый угол α так, что в новой системе координат уравнение той же квадрики ℓ не будет содержать слагаемого с произведением неизвестных.

Если $a_{12} = 0$, то уже в исходной системе координат уравнение квадрики ℓ не содержит слагаемого с произведением неизвестных и в качестве искомого α можно взять угол 0°. Поэтому далее можно считать, что

$$a_{12} \neq 0. \tag{2}$$

Повернем систему Oxy на некоторый угол α. В новой системе координат квадрика будет иметь уравнение вида

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0.$$

Используя формулы (8) из § 5, легко проверить, что

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, && (3)\\ 2a'_{12} &= 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2(a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha, && (4)\\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha. && (5) \end{aligned}$$

Докажем, что существует угол α такой, что $2a'_{12} = 0$. Из (4) вытекает, что $2a'_{12} = 2a_{12}\cos 2\alpha - (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha$. Таким образом, $2a'_{12} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$2a_{12}\cos 2\alpha = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha. \qquad (6)$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$ (в противном случае, т. е. при «повороте» системы координат на 0°, коэффициент при xy останется без изменения и потому будет отличен от 0). Следовательно, и $2\alpha \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и потому $0 < 2\alpha < \pi$ (если найдется удовлетворяющий этому ограничению угол α такой, что выполнено равенство (6), то этого будет достаточно для наших целей). Следовательно,

$$\sin 2\alpha \neq 0. \qquad (7)$$

Неравенства (2) и (7) позволяют нам разделить обе части равенства (6) на $2a_{12}\sin 2\alpha$. В результате мы получаем следующее уравнение относительно α:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\,. \tag{8}$$

Это уравнение всегда имеет решение. Повернув систему координат на угол α, являющийся решением этого уравнения, мы добьемся поставленной цели — «уберем» из уравнения квадрики слагаемое с произведением неизвестных.

- При решении конкретных задач для выполнения шага 1 надо будет использовать формулы поворота системы координат на угол α, в которых фигурируют $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а не $\operatorname{ctg} 2\alpha$ (см. формулы (8) в § 5). Чтобы найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, зная $\operatorname{ctg} 2\alpha$, надо сначала надо использовать равенство $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$. Поскольку $\operatorname{ctg} 2\alpha$ известен, это равенство можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$. В самом деле, если положить $t = \operatorname{tg}\alpha$ и $k = \operatorname{ctg} 2\alpha$, то наше уравнение можно переписать в виде $t^2 + 2kt - 1 = 0$. Оно всегда имеет два решения, поскольку $D = 4k^2 + 4 > 0$. Следовательно, есть два возможных значения для $\operatorname{tg}\alpha$. Выбрав любое из них, можно с помощью равенства $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ найти два возможных значения для $\cos\alpha$. Вновь можно выбрать любое из них, после чего $\sin\alpha$ однозначно находится из равенства $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$.

Итак, после поворота на угол α, определяемый уравнением (8), $a'_{12} = 0$. Докажем, что при этом хотя бы один из коэффициентов a'_{11} и a'_{22} отличен от нуля. Предположим, напротив, что $a'_{11} = a'_{22} = 0$. Складывая равенства (3) и (5), имеем

$$0 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + a_{22}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a_{11} + a_{22},$$

откуда $a_{22} = -a_{11}$. Подставим $-a_{11}$ вместо a_{22} в равенства (3) и (4).

Получим:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha - a_{11}\sin^2\alpha = a_{11}\cos 2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha,$$
$$a'_{12} = a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha = a_{12}\cos 2\alpha - a_{11}\sin 2\alpha.$$

Таким образом,

$$a_{11}\cos 2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha = 0, \tag{9}$$
$$a_{12}\cos 2\alpha - a_{11}\sin 2\alpha = 0. \tag{10}$$

Если $a_{11} = 0$, то из (9) вытекает, что $a_{12}\sin 2\alpha = 0$. Но это невозможно в силу (2) и (7). Следовательно, $a_{11} \neq 0$. С учетом (2) и (7) из (9) вытекает теперь, что $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, а из (10) — что $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}}{a_{12}}$. Следовательно, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$. Но тогда $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что $a_{11} = 0$. Но, как отмечалось выше, это невозможно.

Итак, если повернуть систему координат на угол α, являющийся решением уравнения (8), то в уравнении квадрики в новой системе координат коэффициент при xy будет равен 0, а хотя бы один из коэффициентов при x^2 и y^2 будет отличен от 0. Иными словами, в новой системе координат уравнение квадрики ℓ имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{11}$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11} и a_{22} отличен от 0.

Шаг 2. Проверим теперь, что параллельным переносом системы координат можно избавиться от линейных слагаемых. Более точно, мы установим, что:

а) если $a_{11} \neq 0$, то сдвигом начала системы координат вдоль оси Ox можно получить новую систему координат, в которой в уравнении квадрики ℓ коэффициент при x равен 0;

б) если $a_{22} \neq 0$, то сдвигом начала системы координат вдоль оси Oy можно получить новую систему координат, в которой в уравнении квадрики ℓ коэффициент при y равен 0.

Оба этих утверждения доказываются абсолютно аналогично. Поэтому мы ограничимся проверкой только первого из них. Итак, пусть $a_{11} \neq 0$.

В уравнении (11) выделим полный квадрат по x:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} = 0.$$

Проведем замену неизвестных:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y . \end{cases}$$

Геометрически этой замене неизвестных соответствует параллельный перенос системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку с координатами $(-\frac{a_1}{a_{11}}, 0)$. В новой системе координат квадрика ℓ имеет уравнение

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_2 y' + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$. Коэффициент при x в этом уравнении равен 0. При необходимости, т. е. в случае, когда $a_{22} \neq 0$, аналогичным образом (выделив полный квадрат по y) можно обнулить коэффициент при y.

Итак, мы можем считать, что уравнение квадрики ℓ имеет один из следующих видов:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \quad \text{где } A \neq 0,\ B \neq 0, \tag{12}$$
$$Dx^2 + 2Ey + F = 0, \quad \text{где } D \neq 0, \tag{13}$$
$$Dy^2 + 2Ex + F = 0, \quad \text{где } D \neq 0. \tag{14}$$

Если квадрика имеет уравнение (13), то повернем систему координат на угол $\frac{\pi}{2}$. Формулы (8) из § 5 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos\frac{\pi}{2} - y' \sin\frac{\pi}{2} = -y', \\ y = x' \sin\frac{\pi}{2} + y' \cos\frac{\pi}{2} = x'. \end{cases} \tag{15}$$

Поэтому после поворота квадрика будем иметь уравнение вида (14). Это позволяет далее считать, что квадрика имеет либо уравнение вида (12), либо уравнение вида (14).

Доказательство классификационной теоремы: шаг 3, случай 1 (1)

Шаг 3. Дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на два случая.

Случай 1: квадрика задается уравнением вида (12). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 1.1: $C \neq 0$. В этом случае уравнение (12) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-C/A} + \frac{y^2}{-C/B} = 1. \qquad (16)$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} > 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, мы получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если $a \geqslant b$, оно является каноническим уравнением эллипса. В противном случае мы получим тот же результат, сделав замену неизвестных (15).

б) Числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{C}{A} > 0$ и $-\frac{C}{B} < 0$ (в противном случае следует сделать замену неизвестных (15)). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{C}{B}}$, мы получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. каноническое уравнение гиперболы.

в) $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{\frac{C}{B}}$, мы получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, которое задает мнимый эллипс.

Подслучай 1.2: $C = 0$. При таком C уравнение (12) можно переписать в виде

$$Ax^2 + By^2 = 0. \tag{17}$$

Возможны два варианта.

а) Числа A и B имеют одинаковый знак. Можно считать, что $A, B > 0$ (если это не так, умножим уравнение (17) на -1). Полагая $a = \sqrt{A}$ и $b = \sqrt{B}$, получаем уравнение $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$, которое задает пару мнимых пересекающихся прямых.

б) Числа A и B имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, наше уравнение на -1, можно добиться выполнения неравенств $A > 0$ и $B < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{A}$ и $b = \sqrt{-B}$, мы получим уравнение $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$, которое можно переписать в виде $(ax + by)(ax - by) = 0$. Оно задает пару пересекающихся прямых с уравнениями $ax + by = 0$ и $ax - by = 0$ (эти прямые пересекаются, поскольку их главные векторы $\vec{n}_1 = (a, b)$ и $\vec{n}_2 = (a, -b)$ не пропорциональны).

Случай 2: квадрика задается уравнением вида (14). Здесь также возможны два подслучая.

Подслучай 2.1: $E \neq 0$. При таком E уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (14) в виде

$$y^2 = -\frac{2E}{D}x - \frac{F}{D} = -\frac{2E}{D}\left(x + \frac{F}{2E}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{F}{2E}, \\ y' = y, \end{cases}$$

которая соответствует параллельному переносу системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку с координатами $(-\frac{F}{2E}, 0)$. В новой системе координат квадрика имеет уравнение

$$(y')^2 = -\frac{2E}{D} \cdot x'.$$

Полагая $p = -\frac{E}{D}$, получаем уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, то оно является каноническим уравнением параболы.

Если же $p < 0$, повернем систему координат на угол π. Формулы (8) из § 5 при $\alpha = \pi$ имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos\pi - y' \sin\pi = -x', \\ y = x' \sin\pi + y' \cos\pi = -y'. \end{cases}$$

Поэтому мы применим к уравнению $(y')^2 = 2px'$ замену переменных

$$\begin{cases} x' = -x'', \\ y' = -y''. \end{cases}$$

В результате уравнение квадрики примет вид $(y'')^2 = -2px''$. Поскольку в рассматриваемом случае $-p > 0$, мы получили каноническое уравнение параболы.

Подслучай 2.2: $E = 0$. При таком E уравнение (14) можно переписать в виде

$$y^2 = -\frac{F}{D}\,. \tag{18}$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{F}{D} > 0$. Полагая $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является пара параллельных прямых $y = a$ и $y = -a$.

б) $-\frac{F}{D} = 0$. Здесь уравнение (18) имеет вид $y^2 = 0$ и определяет пару совпавших прямых.

в) $-\frac{F}{D} < 0$. Полагая $a = \sqrt{\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y^2 = -a^2$, которое задает пару мнимых параллельных прямых.

Мы завершили разбор всех возможных случаев и подслучаев. Как видим, в процессе этого разбора возникли все девять типов квадрик, упомянутых в формулировке теоремы, и не возникло никаких других. Теорема полностью доказана. $\square$