§ 11. Парабола

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определения

Параболой называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

где $p > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* параболы. Число p называется *параметром параболы*.

- Как и в случаях эллипса и гиперболы, каноническое уравнение параболы является ее общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 6.
- В школьном курсе математики дается другое определение параболы. Связь между «школьной» параболой и тем понятием параболы, которое введено только что, будет обсуждена в конце данного параграфа.

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении параболы. Пусть парабола задана уравнением (1).

Определения

Точка $O(0,0)$ (начало координат) называется *вершиной* параболы, прямая $y = 0$ (ось абсцисс) — *осью* параболы, а точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ — ее *фокусом*. Прямая с уравнением $x = -\frac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы.

Происхождение терминов «вершина параболы» и «ось параболы» станет ясно позднее, после того, как мы изучим форму параболы.

Изучим «внешний вид» параболы. Ясно, график параболы симметричен относительно оси Ox и $x = \frac{y^2}{2p} \geqslant 0$, т. е. вся парабола расположена в правой полуплоскости. Поэтому достаточно изучить вид параболы в первой четверти. В этом случае из (1) вытекает, что

$$y = \sqrt{2px}. \tag{2}$$

Вычислив первую и вторую производные этой функции, получим:

$$y' = \sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-\sqrt{p}}{(2x)^{3/2}}.$$

Следовательно, $y' > 0$, а $y'' < 0$ при любом x. Это означает, что в первой четверти парабола возрастает и выпукла. Кроме того, из (2) с очевидностью вытекает, что она пересекает оси абсцисс и ординат в единственной точке — начале координат. С учетом симметрии относительно оси абсцисс, получаем кривую, изображенную на рис. 1 на следующем слайде (чтобы выделить параболу среди вспомогательных линий, она изображена красным цветом).

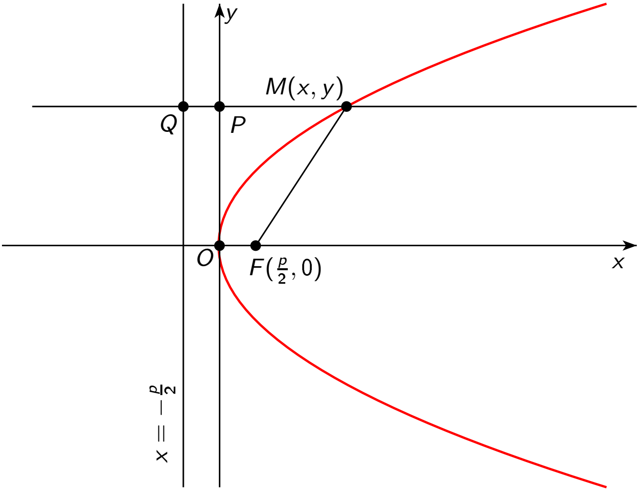

Рис. 1. Парабола

Расположение параболы на плоскости (комментарий к рисунку)

Внешне парабола напоминает одну из ветвей гиперболы, но есть очень существенное отличие: в отличие от гиперболы, парабола не имеет асимптот. Как и в случаях эллипса и гиперболы (см. рис. 1 в § 9 и 10), директриса параболы не пересекают кривую, а ее фокус расположен «внутри» кривой. На точки M, P и Q, проходящую через них прямую и отрезок FM, присутствующие на рис. 1, можно пока внимания не обращать — они появятся в нашем изложении позднее.

Следующая теорема дает характеризацию параболы, которую нередко принимают за ее определение.

Теорема 11.1 (директориальное свойство параболы)

Точка M принадлежит параболе тогда и только тогда, когда расстояние от M до фокуса равно расстоянию от M до директрисы.

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что ℓ — директриса параболы, а точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. Тогда

$$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Поскольку $x \geqslant 0$, а $p > 0$, получаем, что $x + \frac{p}{2} > 0$, и потому $|FM| = x + \frac{p}{2}$. Проведем через точку M прямую, перпендикулярную оси ординат. Точки пересечения этой прямой с осью ординат и с директрисой параболы обозначим через P и Q соответственно (см. рис. 1). Ясно, что

$$d(M, \ell) = |MP| + |PQ| = x + \frac{p}{2}.$$

Следовательно, $|FM| = d(M, \ell)$.

Достаточность. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости и расстояние от M до фокуса параболы равно расстоянию от M до ее директрисы. Используя формулу (15) из § 6, получаем

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, имеем

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда $y^2=2px$. Следовательно, точка M принадлежит параболе. $\square$

Директориальные свойства эллипса, гиперболы и параболы: единая формулировка

Директориальные свойства эллипса, гиперболы и параболы говорят, по сути, об одном и том же: отношение расстояние от точки на кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы есть константа, не зависящая от выбора точки. Для эллипса и гиперболы это отношение равно эксцентиситету кривой, а для параболы — единице. В связи с этим число 1 иногда называют *эксцентриситетом* параболы. Это дает возможность сформулировать теоремы 9.2, 10.2 и 11.1 в виде одного утверждения: *если μ — эллипс, не являющийся окружностью, гипербола или парабола, то точка плоскости принадлежит кривой μ тогда и только тогда, когда отношение расстояния от этой точки до фокуса кривой к расстоянию от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы*[1] *равно эксцентриситету кривой.*

[1] Для удобства формулировки мы полагаем здесь, что (единственная) директриса параболы соответствует ее (единственному) фокусу.

Оптическое свойство параболы (1)

Предложение 11.1 (оптическое свойство параболы)

Луч света, выпущенный из фокуса параболы, после отражения от параболы направлен параллельно ее оси.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2 (см. следующий слайд). Пусть луч света, выпущенный из фокуса, отражается от параболы в точке $M(x_0, y_0)$. Через ℓ обозначим касательную к параболе в точке M, через A — точку пересечения прямой ℓ с осью абсцисс, а через ℓ' — луч, являющийся отражением от параболы луча, выпущенного из фокуса. Требуется доказать, что $\ell' \parallel Ox$. Произвольным образом выберем на прямой ℓ и на луче ℓ' точки, расположенные правее точки M, и обозначим их через B и C соответственно (см. рис. 2). Поскольку угол падения равен углу отражения, получаем, что $\angle BMC = \angle AMF$.

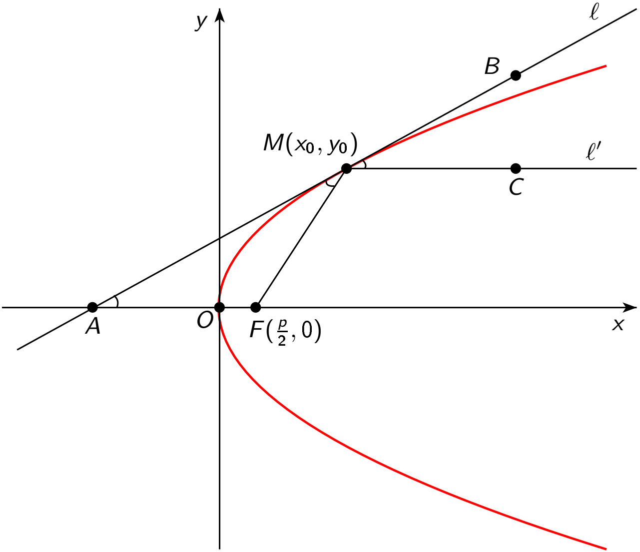

Рис. 2. К доказательству оптического свойства параболы

Докажем, что $|AF| = |FM|$. Из доказательства теоремы 11.1 вытекает, что $|FM| = x_0 + \frac{p}{2}$. Для того, чтобы найти длину отрезка AF, найдем уравнение прямой ℓ. Продифференцируем по x обе части канонического уравнения параболы (считая y функцией от x и используя при дифференцировании левой части правило дифференцирования сложной функции). Получим $2yy' = 2p$, откуда $y' = \frac{p}{y}$. Подставим найденное выражение для y' в общий вид уравнения касательной, т. е. в уравнение $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$. Получим $y = y_0 + \frac{p}{y_0}(x - x_0)$. Используя тот факт, что точка $M(x_0, y_0)$ лежит на параболе, имеем

$$y_0 y = y_0^2 + px - px_0 = 2px_0 + px - px_0 = p(x + x_0).$$

Таким образом, прямая ℓ имеет уравнение $p(x + x_0) - y_0 y = 0$. Подставив в него $y = 0$, получим $x = -x_0$. Таким образом, точка A имеет координаты $(-x_0, 0)$, и потому $|AF| = x_0 + \frac{p}{2} = |FM|$.

Итак, $|AF| = |FM|$. Следовательно, углы $\angle MAF$ и $\angle AMF$ равны, как углы при основании равнобедренного треугольника $\triangle AMF$. Таким образом, $\angle MAF = \angle AMF = \angle BMC$. Поскольку $\angle MAF$ и $\angle BMC$ — соответственные углы при пересечении ℓ' и Ox прямой ℓ, из равенства этих углов вытекает, что $\ell' \parallel Ox$. $\square$

В школьном курсе математики параболой называется график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Покажем, что «школьная» парабола является параболой и в смысле определения, введенного в начале данного параграфа. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3 (см. следующий слайд). Выделив в правой части равенства $y = ax^2 + bx + c$ полный квадрат по x, получим $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. Сделав замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{b}{2a}, \\ y' = y + \frac{b^2}{4a} - c, \end{cases} \tag{3}$$

получим уравнение $y' = a(x')^2$. Применяя теперь замену неизвестных

$$\begin{cases} x'' = y', \\ y'' = x', \end{cases} \tag{4}$$

и полагая $p = \frac{1}{2a}$ (напомним, что $a \neq 0$), мы приходим к уравнению $(y'')^2 = 2px''$. Если $p > 0$, мы получили каноническое уравнение параболы. В противном случае, чтобы прийти к тому же результату, надо еще сделать замену неизвестных

$$\begin{cases} x''' = -x'', \\ y''' = y''. \end{cases} \tag{5}$$

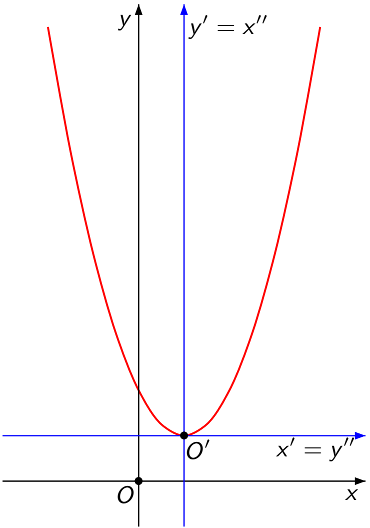

Рис. 3. График функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$

Отметим, что замены системы координат, определяемые формулами (3), (4) и (5), имеют простой геометрический смысл: первой из них соответствует параллельный перенос системы координат, переводящий начало координат в точку с координатами $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c)$, второй — переименование осей координат, а третьей — изменение направления вдоль оси Ox.