§ 10. Гипербола

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение гиперболы

Определения

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболы.

- Как и в случае эллипса, каноническое уравнение гиперболы является ее общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 6.
- В школьном курсе математики дается другое определение гиперболы. Связь между «школьной» гиперболой и тем понятием гиперболы, которое введено только что, будет обсуждена в конце данного параграфа.

Вершины, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы гиперболы

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении гиперболы. Пусть гипербола задана уравнением (1). Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ясно, что $c > a$.

Определения

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(b, 0)$ и $(-b, 0)$ называются *вершинами* гиперболы, величина a — *действительной полуосью* гиперболы, а величина b — ее *мнимой полуосью*. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы, причем фокус F_1 называется *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Если точка M принадлежит гиперболе, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами*. Величина $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы.

«Физический смысл» введенных сейчас понятий станет ясен позднее, после того, как мы изучим форму гиперболы. Пока отметим только, что из определения эксцентриситета непосредственно вытекает следующий факт:

- *для любой гиперболы выполнено неравенство* $e > 1$.

Изучим «внешний вид» гиперболы. Предположим, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Как и в случае эллипса, легко убедиться, что гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Поэтому достаточно изучить форму гиперболы лишь в первой четверти. Это позволяет далее считать, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда, в силу (1),

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{2}$$

Рассмотрим прямую с уравнением $y = \frac{b}{a} \cdot x$, точнее, луч этой прямой, расположенный в первой четверти. Ясно, что $\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Это означает, что гипербола расположена ниже прямой. Далее,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ гипербола неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a} \cdot x$, которая, таким образом, является асимптотой гиперболы.

Нетрудно видеть, что в первой четверти нет точек гиперболы, для которых $x < a$. (В самом деле, $x^2 = a^2(1 + \frac{y^2}{b^2})$, и потому если $x \geqslant 0$, то $x = a \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \geqslant a$.) Вычислив первую и вторую производные функции (2), получим:

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}}.$$

В частности, $y' > 0$ и $y'' < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, в первой четверти гипербола возрастает и выпукла. Кроме того, из (2) легко вытекает, что в первой четверти гипербола пересекает ось абсцисс в точке $(a, 0)$, а ось ординат не пересекает. С учетом симметрии относительно осей координат и того, что прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$ является асимптотой, получаем кривую, изображенную на рис. 1 (см. следующий слайд).

Расположение гиперболы на плоскости (рисунок)

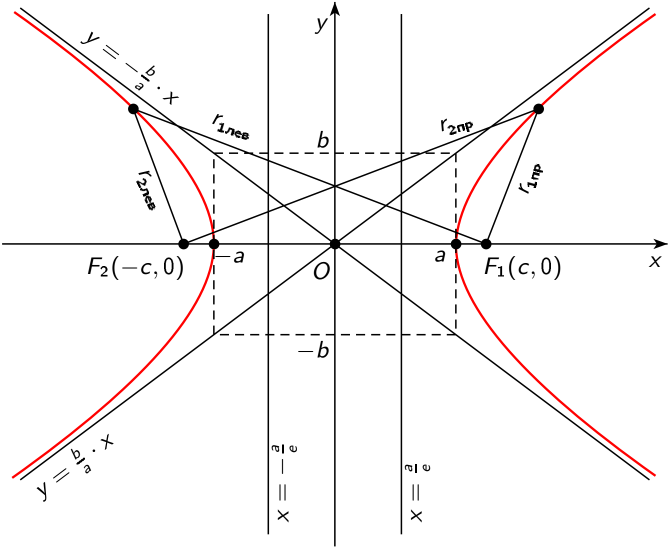

Рис. 1. Гипербола

Расположение гиперболы на плоскости (комментарий к рисунку)

Мы видим, что гипербола распадается на две части, одна из которых лежит в правой полуплоскости, а другая — в левой. Эти части называются, соответственно, *правой* и *левой ветвью* гиперболы. Отметим еще, что, в силу симметрии относительно осей координат, асимптотой гиперболы является не только прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$, но также и прямая $y = -\frac{b}{a} \cdot x$.

На рис. 1 указаны также используемые в дальнейшем обозначения для фокальных радиусов: если точка лежит на левой [правой] ветви гиперболы, то расстояния от нее до фокусов обозначаются через $r_{\mathbf{1лев}}$ и $r_{\mathbf{2лев}}$ [соответственно $r_{\mathbf{1пр}}$ и $r_{\mathbf{2пр}}$] (оба раза цифра 1 в индексах соответствует фокусу F_1, а цифра 2 — фокусу F_2).

Параметрические уравнения гиперболы (1)

Выведем параметрические уравнения гиперболы. Для этого нам понадобятся следующие две функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Первая из них называется *гиперболическим синусом*, а вторая — *гиперболическим косинусом*. Легко проверяется, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, которое, по аналогии с основным тригонометрическим тождеством, называется *основным гиперболическим тождеством*.

Предложение 10.1

Параметрические уравнения правой ветви гиперболы, заданной уравнением (1)*, имеют вид*

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases}$$

а параметрические уравнения ее левой ветви — вид

$$\begin{cases} x = -a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Доказательство. Мы докажем утверждение, относящееся к правой ветви гиперболы, для левой ветви доказательство аналогично. Таким образом, мы хотим доказать, что точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит правой ветви гиперболы, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда существует число t_0 такое, что

$$x_0 = a\,\mathrm{ch}\,t_0 \quad \text{и} \quad y_0 = b\,\mathrm{sh}\,t_0. \tag{3}$$

Достаточность в этом утверждении очевидна: если выполнены равенства (3), то $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \mathrm{ch}^2\,t_0 - \mathrm{sh}^2\,t_0 = 1$.

Докажем *необходимость*. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на правой ветви гиперболы, заданной уравнением (1). Докажем, что существует число $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что выполнены равенства (3). Рассмотрим равенство

$$x_0 = a\,\mathrm{ch}\,t \tag{4}$$

как уравнение относительно t. Это уравнение можно переписать в виде $\frac{a(e^t+e^{-t})}{2} = x_0$ или $ae^t + ae^{-t} = 2x_0$. Умножим обе части полученного равенства на e^t и перепишем полученное равенство в виде $ae^{2t} - 2x_0e^t + a = 0$. Полагая $u = e^t$, получаем следующее квадратное уравнение относительно u:

$$au^2 - 2x_0u + a = 0. \tag{5}$$

Его дискриминант равен $D = 4(x_0^2 - a^2)$. Учитывая, что точка M лежит на гиперболе, получаем, что $|x_0| \geqslant a$, и потому $D \geqslant 0$. Следовательно, уравнение (5) имеет по крайней мере один действительный корень. Корни этого уравнения находятся по формуле

$$u_{1,2} = \frac{x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}.$$

Учитывая, что $x_0 > 0$ (поскольку точка M лежит на правой ветви гиперболы), $x_0^2 - a^2 < x_0^2$ и $a > 0$, получаем, что оба корня уравнения (5) положительны. Обозначим произвольный корень этого уравнения через u'. Поскольку $u' > 0$, существует число $t' = \ln u'$. Это число является решением уравнения (4), т. е. $x_0 = a \operatorname{ch} t'$. Поскольку точка M лежит на гиперболе, выполнено равенство $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Используя основное гиперболическое тождество, имеем

$$\frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - 1 = \operatorname{ch}^2 t' - (ch^2 t' - \operatorname{sh}^2 t') = \operatorname{sh}^2 t',$$

откуда $y_0^2 = b^2 \operatorname{sh}^2 t'$ и $y_0 = \pm b \operatorname{sh} t'$. Если $y_0 = b \operatorname{sh} t'$, то равенства (3) выполнены при $t_0 = t'$. Предположим теперь, что $y_0 = -b \operatorname{sh} t'$. Очевидно, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Поэтому в данном случае равенства (3) выполнены при $t_0 = -t'$.

Основная цель данного параграфа — доказать две теоремы, характеризующие гиперболу как геометрическое место точек с некоторыми свойствами. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 10.1

Если точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), то

$$r_{1\text{пр}} = ex - a,\ \ r_{2\text{пр}} = ex + a,\ \ r_{1\text{лев}} = -ex + a,\ \ r_{2\text{лев}} = -ex - a.$$

Доказательство. Если точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе, то

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

откуда

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - b^2. \tag{6}$$

Предположим, что точка M лежит на правой ветви гиперболы.

Используя (6), получаем, что выполнены равенства

$$r_{1\text{пр}} = |F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \\ = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2 - b^2} = \\ = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 - b^2}.$$

Учитывая, что

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2, \quad c = ea, \quad \text{и} \quad c^2 - b^2 = a^2,$$

имеем

$$r_{1\text{пр}} = \sqrt{e^2x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex-a)^2} = |\,ex - a|.$$

Поскольку $x \geqslant a$, а $e > 1$, то $|ex - a| = ex - a$, и потому $r_{1\text{пр}} = ex - a$. Остальные равенства из формулировки леммы проверяются вполне аналогично. $\square$

Фокальное свойство гиперболы (1)

Следующая теорема дает характеризацию гиперболы, которую нередко принимают за ее определение.

Теорема 10.1 (фокальное свойство гиперболы)

Точка M принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда модуль разности расстояний от M до фокусов равен $2a$.

Доказательство. *Необходимость.* В силу леммы 10.1 имеем $|r_{1\text{пр}} - r_{2\text{пр}}| = |r_{1\text{лев}} - r_{2\text{лев}}| = 2a$.

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a$. Тогда

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\right| = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

После очевидных преобразований имеем

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = -b^2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Разделив это равенство на $-a^2b^2$, мы получим уравнение (1). $\square$

Следующая теорема дает еще одну характеризацию гиперболы.

Теорема 10.2 (директориальное свойство гиперболы)

Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда отношение расстояния от M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы. □

Мы не приводим доказательство этой теоремы, поскольку оно вполне аналогично доказательству теоремы 9.2.

Оптическое свойство гиперболы (1)

Предложение 10.2 (оптическое свойство гиперболы)

Луч света, выпущенный из фокуса гиперболы, после отражения от ветви гиперболы, соответствующей другому фокусу, направлен так, что его продолжение проходит через другой фокус.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2 (см. следующий слайд). Будем считать, что луч света выпущен из правого фокуса (случай левого фокуса разбирается вполне аналогично). Обозначим точку пересечения этого луча с левой ветвью гиперболы через M, а ее координаты — через (x_0, y_0). Требуется доказать, что луч MF_2 является продолжением отражения исходного луча от гиперболы. Обозначим касательную к гиперболе в точке M через ℓ, угол между прямой ℓ и лучом F_1M — через φ, а угол между ℓ и лучом MF_2 — через ψ (см. рис. 2). Поскольку угол падения равен углу отражения, требуется доказать, что $\varphi = \psi$.

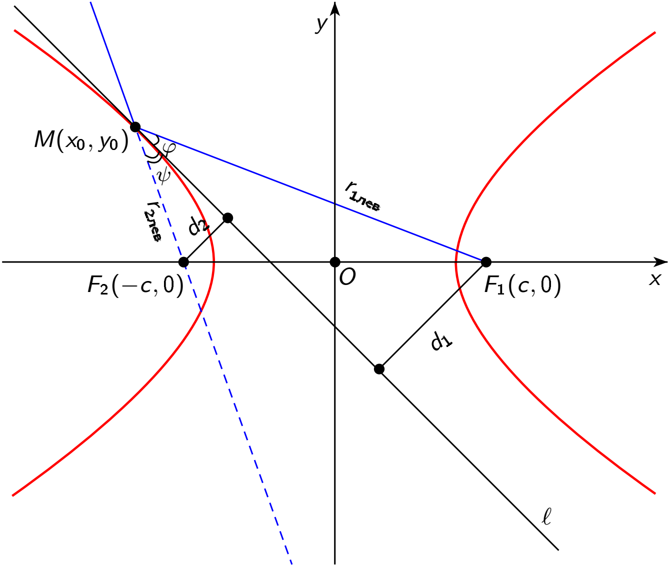

Рис. 2. К доказательству оптического свойства гиперболы

Как и в § 9 при доказательстве оптического свойства эллипса, мы докажем, что $\sin\varphi = \sin\psi$. Ясно, что этого достаточно для наших целей. Рассуждая так же, как в § 9 при выводе уравнения касательной к эллипсу, получаем, что прямая ℓ имеет уравнение $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$. Положим $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$. Используя формулу (15) в § 6, найдем расстояние d_1 от фокуса F_1 до прямой ℓ:

$$d_1 = \frac{\left|\frac{x_0 c}{a^2} - 1\right|}{N} = \frac{|x_0 c - a^2|}{Na^2} = \frac{a^2 - x_0 c}{Na^2}$$

(последнее равенство объясняется тем, что $x_0 < 0$, а $c > 0$, откуда $x_0 c - a^2 < 0$). С другой стороны, в силу леммы 10.1, $r_{1\text{лев}} = -ex_0 + a = -\frac{c}{a} \cdot x_0 + a = \frac{a^2 - x_0 c}{a}$. Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{d_1}{r_{1\text{лев}}} = \frac{(a^2 - x_0 c)a}{Na^2(a^2 - x_0 c)} = \frac{1}{Na}.$$

Аналогично, обозначив через d_2 расстояние от F_2 до ℓ, находим, что $d_2 = \frac{-x_0 c - a^2}{Na^2}$ и $r_{2\text{лев}} = \frac{-x_0 c - a^2}{a}$, откуда $\sin\psi = \frac{d_2}{r_{2\text{лев}}} = \frac{1}{Na}$. Следовательно, $\sin\varphi = \sin\psi$, и потому $\varphi = \psi$. □

В школьном курсе математики гиперболой называется график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Естественно возникает вопрос, как соотносится «школьная» гипербола с гиперболой, введенной в этом параграфе. Отвечая на этот вопрос, можно ограничиться случаем, когда $k > 0$ (если $k < 0$, можно сделать замену неизвестных $x' = -x$, $y' = y$).

Рассмотрим новую систему координат $Ox'y'$, полученную из старой поворотом на 45°. Используя формулы поворота системы координат (см. формулы (8) в § 5), получаем, что

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases} \tag{7}$$

Можно считать, что $x \neq 0$, так как кривая, заданная уравнением $y = \frac{k}{x}$, очевидно не имеет точек, абсцисса которых равна 0. Поэтому равенство $y = \frac{k}{x}$ эквивалентно равенству $xy = k$. Если подставить в него x и y из формул (7), мы получим

$$k = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}\left((x')^2 - (y')^2\right).$$

«Школьная» гипербола (2)

Это означает, что в системе координат $Ox'y'$ «школьная» гипербола определяется уравнением $\frac{(x')^2}{2k} - \frac{(y')^2}{2k} = 1$. Поскольку $k > 0$, то $2k = a^2$ для некоторого $a > 0$. Следовательно, последнее уравнение можно переписать в виде $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{a^2} = 1$. Мы получили уравнение вида (1), в котором $a = b$.

Определение

Гипербола, у которой действительная полуось равна мнимой, называется *равносторонней*.

Таким образом,

- *«школьная» гипербола является частным случаем гиперболы, определяемой уравнением (1), а именно, равносторонней гиперболой. Каноническое уравнение эта гипербола имеет в системе координат, которая получается повором на угол 45° той системы координат, в которой она имеет уравнение вида $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.*

Проведенные рассуждения иллюстрирует рис. 3 на следующем слайде.

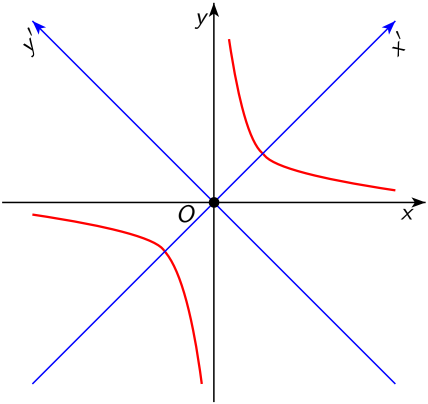

Рис. 3. «Школьная» гипербола