Часть III. Квадрики на плоскости

§ 9. Эллипс

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

В трех предыдущих параграфах изучались прямые и плоскости, т. е. кривые и поверхности, задаваемые уравнениями первого порядка. В оставшейся части курса изучаются кривые и поверхности, задаваемые уравнениями второго порядка. Ближайшие четыре параграфа посвящены кривым второго порядка, которые называются также квадриками на плоскости. В этом и двух следующих параграфах будут рассмотрены три конкретных типа таких кривых — эллипс, гипербола и парабола, затем в § 12 будет приведена полная классификация квадрик на плоскости.

!! *В этом и всех последующих параграфах предполагается, что системы координат на плоскости и в пространстве, в которых будут записываться уравнения кривых и поверхностей, являются прямоугольными декартовыми.*

Определение эллипса

Определения

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипса.

- Каноническое уравнение эллипса является его общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 6.

Вершины, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы эллипса

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении эллипса. Пусть эллипс задан уравнением (1). Ясно, что $a^2 - b^2 \geqslant 0$. Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ясно, что $0 \leqslant c < a$.

Определения

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$ называются *вершинами* эллипса, величина a — *большой полуосью* эллипса, а величина b — его *малой полуосью*. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* эллипса, причем фокус F_1 называется *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Если точка M принадлежит эллипсу, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* и обозначаются соответственно через r_1 и r_2. Величина $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса (при $e = 0$ директрис эллипса не существует).

«Физический смысл» введенных сейчас понятий станет ясен позднее, после того, как мы изучим форму эллипса. Пока отметим только, что из определения эксцентриситета непосредственно вытекает следующий факт:

- *для любого эллипса выполнены неравенства* $0 \leqslant e < 1$.

Изучим «внешний вид» эллипса. Предположим, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда $x^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2})$, откуда $|x| = a \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \leqslant a$. Аналогично проверяется, что $|y| \leqslant b$. Это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ координатной плоскости. Далее, очевидно, что эллипс симметричен относительно обеих осей координат, и потому достаточно понять, как он выглядит в первой четверти. Поэтому далее будем считать, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (2)$$

Вычислив первую и вторую производные этой функции, получим:

$$y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}. \qquad (3)$$

В частности, $y' < 0$ и $y'' < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, в первой четверти эллипс убывает и является выпуклым. Кроме того, из (2) легко выводится, что в первой четверти эллипс пересекает ось абсцисс в точке $(a, 0)$ и ось ординат в точке $(0, b)$. Отразив полученную кривую симметрично сначала в четвертую четверть, а затем в левую полуплоскость, получим кривую, изображенную на рис. 1 (см. следующий слайд).

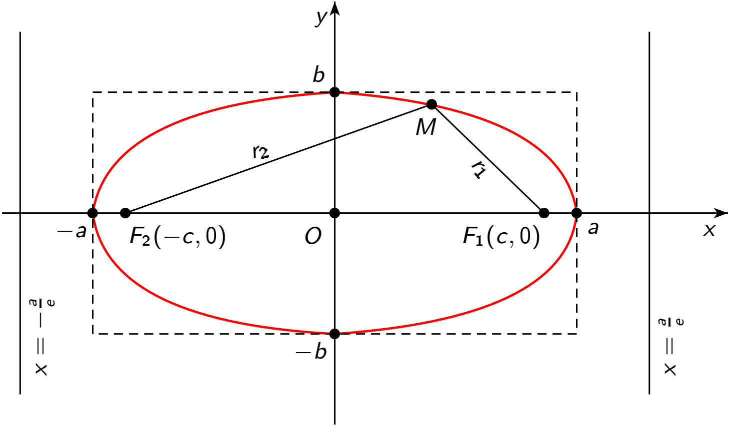

Рис. 1. Эллипс

Как показывает рис. 1, эллипс выглядит как вытянутая (вдоль оси абсцисс) или сжатая (вдоль оси ординат) окружность. Это не случайно. При $a = b$ уравнение (1) можно переписать в виде $x^2 + y^2 = a^2$, а последнее есть не что иное, как уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат. Далее, ясно, что если $a = b$, то $c = 0$, а значит и $e = 0$. Таким образом, имеют место следующие факты.

- *Окружность является частным случаем эллипса. Обе полуоси окружности совпадают с ее радиусом, фокусы окружности совпадают между собой и расположены в центре окружности, для любой точки на окружности оба фокальных радиуса этой точки равны радиусу окружности. Эксцентриситет окружности равен* 0. *Окружность не имеет директрис.*

Эксцентриситет является мерой вытянутости эллипса, его «удаленности» от окружности.

- Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше похож на окружность, а чем он ближе к единице, тем более эллипс вытянут вдоль оси абсцисс.

Чем кометы отличаются от планет?

Укажем еще одно «физическое свойство» эллипса.

- Эллипс — это та кривая, по которой одно тело движется вокруг другого по действием силы притяжения (например, Земля вокруг Солнца или Луна вокруг Земли). При этом тело, вокруг которого происходит движение, всегда находится в одном из фокусов эллипса.

Отметим, что эксцентриситеты орбит, по которым «обычные» планеты движутся вокруг Солнца, как правило, весьма малы. Например, эксцентриситет орбиты Земли равен $0,0167$. А у орбит, по которым движутся кометы, эксцентриситет, напротив, весьма близок к единице (например, у кометы Галлея он равен $0,967$). Именно поэтому кометы так редко появляются вблизи Солнца.

Параметрические уравнения эллипса (1)

Выведем параметрические уравнения эллипса.

Предложение 9.1.

Параметрические уравнения эллипса, заданного уравнением (1), *имеют вид*

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что при $a = b$ получаются параметрические уравнения окружности, упоминавшиеся в § 6.

Доказательство. Требуется доказать, что точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1), тогда и только тогда, когда существует число t_0 такое, что $x_0 = a\cos t_0$ и $y_0 = b\sin t_0$.

Достаточность в этом утверждении очевидна: если $x_0 = a\cos t_0$ и $y_0 = b\sin t_0$, то $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 = 1$.

Докажем *необходимость*. Если $a = b$, то эллипс является окружностью радиуса a с центром в начале координат. То, что эта окружность задается уравнениями вида (4) при $a = b$, хорошо известно и доказано в начале § 6. Поэтому далее будем считать, что $a > b$. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1).

Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2. Для удобства будем считать, что точка M лежит в I четверти (в остальных случаях рассуждения аналогичны). Построим окружности радиусов a и b с центром в начале координат. Первую из них для краткости будем называть большой, а вторую — малой. Проведем через точку M прямую, параллельную оси Oy, и обозначим через A точку ее пересечения с большой окружностью. Далее, проведем через точку M прямую, параллельную оси Ox, и обозначим через B точку ее пересечения с малой окружностью. Проекции точек A и B на ось Ox обозначим через A' и B' соответственно. Поскольку большая окружность имеет уравнение $x^2 + y^2 = a^2$, а малая — уравнение $x^2 + y^2 = b^2$, получаем, что точка A имеет координаты $(x_0, \sqrt{a^2 - x_0^2})$, а точка B — координаты $(\sqrt{b^2 - y_0^2}, y_0)$.

Точка M лежит на эллипсе. Следовательно, имеет место равенство $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Умножая обе его части на a^2b^2, имеем $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$. Отсюда $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}$, и значит $b^2 - y_0^2 = \frac{b^2x_0^2}{a^2}$. Аналогично проверяется, что $a^2 - x_0^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2}$. Следовательно, точка A имеет координаты $\left(x_0, \frac{ay_0}{b}\right)$, а точка B — координаты $\left(\frac{bx_0}{a}, y_0\right)$. Но тогда $\overrightarrow{OA} = \left(x_0, \frac{ay_0}{b}\right)$ и $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{bx_0}{a}, y_0\right)$. Ясно, что $\overrightarrow{OA} = \frac{a}{b} \cdot \overrightarrow{OB}$. В силу критерия коллинеарности векторов имеем $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$. Следовательно, точки O, A и B расположены на одной прямой.

Параметрические уравнения эллипса (3)

Обозначим угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и осью Ox через t. Тогда

$$x_0 = |OA'| = |OA| \cdot \cos t = a \cos t \quad \text{и}$$
$$y_0 = |A'M| = |BB'| = |OB| \cdot \sin t = b \sin t.$$

Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнениям (4). $\square$

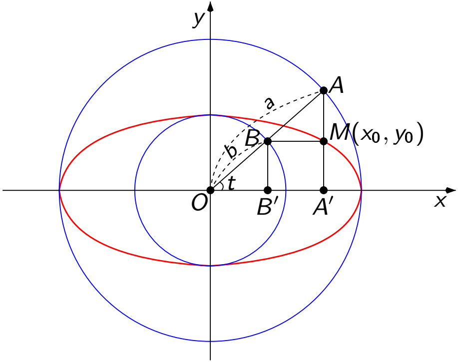

Рис. 2. Параметризация эллипса

Основная цель данного параграфа — доказать две теоремы, характеризующие эллипс как геометрическое место точек с некоторыми свойствами. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 9.1

Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1), то $r_1 = a - ex$ и $r_2 = a + ex$.

Доказательство. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$. Следовательно,

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Поскольку

$$c^2 + b^2 = a^2, \;\; 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2 \;\; \text{и} \;\; ea = c,$$

имеем

$$r_1 = \sqrt{e^2x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex-a)^2} = |\, ex - a|.$$

Так как $0 \leqslant e < 1$ и $x \leqslant a$, то $ex - a \leqslant 0$. Это означает, что $r_1 = |\, ex - a| = a - ex$. Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. $\square$

Следующая теорема дает характеризацию эллипса, которую нередко принимают за его определение.

Теорема 9.1 (фокальное свойство эллипса)

Точка M принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1)*, тогда и только тогда, когда сумма расстояний от M до фокусов равна $2a$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то, в силу леммы 9.1,

$$|F_1M| + |F_2M| = r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a.$$

Достаточность. Предположим, что $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат.

Получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

что после очевидных преобразований дает

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = b^2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив это равенство на a^2b^2, получим уравнение (1). $\square$

Следующая теорема дает еще одну характеризацию эллипса.

Теорема 9.2 (директориальное свойство эллипса)

Точка M принадлежит эллипсу (не являющемуся окружностью) тогда и только тогда, когда отношение расстояния от M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство. Докажем сформулированное утверждение для правого фокуса и правой директрисы. Для левого фокуса и левой директрисы доказательство абсолютно аналогично.

Необходимость. Обозначим через ℓ директрису с уравнением $x = \frac{a}{e}$. Очевидно (и вытекает из формулы (15) в § 6), что расстояние от точки $M(x, y)$ до ℓ равно $\frac{a}{e} - x = \frac{a-ex}{e}$. Используя лемму 9.1, получаем, что если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то

$$\frac{|F_1M|}{d(M,\ell)} = \frac{r_1}{(a-ex)/e} = \frac{a-ex}{a-ex} \cdot e = e.$$

Достаточность. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости, для которой выполнено равенство $\frac{|F_1M|}{d(M,\ell)} = e$ или $|F_1M| = e \cdot d(M,\ell)$. Ясно, что $|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Используя формулу (15) из § 6, получаем, что $d(M,\ell) = |x - \frac{a}{e}|$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = e \cdot \left|x - \frac{a}{e}\right|.$$

Возводя это равенство в квадрат, имеем

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2.$$

Поскольку $ea = c$, последнее равенство можно переписать в виде

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Учитывая, что

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{и} \quad 1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

имеем

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Разделив это равенство на b^2, получим уравнение (1).

Предложение 9.2 (оптическое свойство эллипса)

Луч света, выпущенный из фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходит через другой фокус.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3.

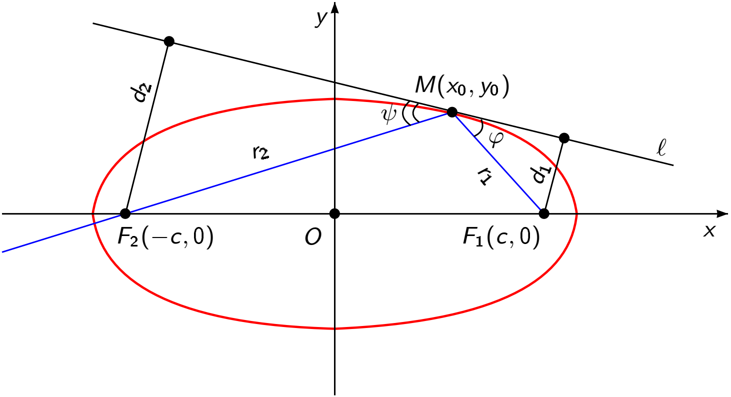

Рис. 3. К доказательству оптического свойства эллипса

Изображенная на рис. 3 прямая ℓ касается эллипса в точке $M(x_0, y_0)$. Согласно законам физики (угол падения равен углу отражения), требуется доказать, что углы, образуемые отрезками F_1M и F_2M с касательной, равны, т. е. что (в обозначениях рис. 3) $\varphi = \psi$. Будем считать, что точка M расположена в I четверти (в остальных случаях доказательство вполне аналогично).

Найдем уравнение прямой ℓ. Как известно из математического анализа, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку с координатами (x_0, y_0), лежащую на этом графике, имеет вид $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Используя формулы (2) и (3), преобразуем сначала выражение для y':

$$y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

(поскольку, в силу (2), $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{y}$). Поэтому уравнение прямой ℓ записывается в виде

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Умножим обе части этого равенства на $\frac{y_0}{b^2}$. Получим

$$\frac{yy_0 - y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0 - x_0^2}{a^2}.$$

Учитывая, что точка M принадлежит эллипсу, имеем

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Итак, прямая ℓ имеет уравнение $\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - 1 = 0$. Положим $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$. Найдем расстояния от фокусов до прямой ℓ. Используя формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости (формула (15) в § 6) и лемму 9.1, имеем:

$$d_1 = d(F_1, \ell) = \frac{1}{N} \cdot \left| \frac{cx_0}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{Na} \cdot |x_0 e - a| = \frac{r_1}{Na} \quad \text{и}$$
$$d_2 = d(F_2, \ell) = \frac{1}{N} \cdot \left| \frac{-cx_0}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{Na} \cdot |x_0 e + a| = \frac{r_2}{Na}.$$

Следовательно, $\frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{Na} = \frac{d_2}{r_2}$. Учитывая, что $\frac{d_1}{r_1} = \sin\varphi$, а $\frac{d_2}{r_2} = \sin\psi$, получаем, что $\sin\varphi = \sin\psi$, т. е. $\varphi = \psi$. □