§ 8. Прямая в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

8.1. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве

Этот параграф во многом схож с двумя предыдущими, но есть и существенные отличия. Как и в случаях кривой на плоскости и поверхности, кривую в пространстве можно задавать либо общими, либо параметрическими уравнениями. Общие уравнения в данном случае возникают из следующего простого наблюдения: любую кривую в пространстве можно представить как пересечение двух поверхностей.

Определение

Будем считать, что в пространстве зафиксирована некоторая система координат. Пусть кривая ℓ является пересечением поверхностей σ_1 и σ_2, поверхность σ_1 задана общим уравнением $F_1(x,y,z)=0$, а поверхность σ_2 — общим уравнением $F_2(x,y,z)=0$. Тогда уравнения

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

называются *общими уравнениями* кривой ℓ.

Из определения общего уравнения поверхности, данного в § 7, вытекает, что точка лежит на кривой ℓ тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений (1).

Параметрические уравнения кривой в пространстве определяются вполне аналогично одноименным уравнениям кривой на плоскости, которые упоминались в § 6.

Определение

Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ — произвольные функции от одной переменной, называются *параметрическими уравнениями* кривой ℓ, если точка M с координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на ℓ тогда и только тогда, когда существует число t_0 такое, что $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$ и $z_0 = h(t_0)$. Переменная t называется *параметром*.

8.2. Виды уравнений прямой в пространстве

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению прямых в пространстве.

Понятие направляющего вектора для прямой в пространстве вводится точно так же, как это было сделано в §6 для прямой на плоскости.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Из этого определения видно, что

- направляющий вектор для данной прямой определен неоднозначно: прямая в пространстве имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов.

Отметим еще, что *для прямой в пространстве понятие нормального вектора не определено*. Формально можно было бы назвать нормальным вектором прямой в пространстве произвольный ортогональный ей ненулевой вектор, но никакой пользы для изучения прямой это понятие не дает, поскольку векторов с указанным свойством «слишком много» — они заполняют собой целую плоскость (перпендикулярную к данной прямой).

Параметрические уравнения прямой

Перейдем к рассмотрению видов уравнений прямой в пространстве. Мы рассмотрим четыре вида таких уравнений: параметрические, канонические, по двум точкам и общие. По сравнению с видами уравнений плоскости и прямой на плоскости (см. два предыдущих параграфа), здесь отсутствуют аналоги уравнений с угловым коэффициентом и в отрезках.

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат. Пусть ℓ — прямая в пространстве, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит прямой ℓ, а вектор $\vec{a} = (q, r, s)$ является ее направляющим вектором. Дословно повторяя рассуждения, проведенные в § 6 при выводе параметрических уравнений прямой на плоскости, можно показать, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \qquad (3)$$

для некоторого t. Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Понятие параметрических уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия параметрических уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Выражая параметр t из первого, второго и третьего уравнений системы (3) и приравнивая полученные выражения, мы получаем уравнения

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}, \tag{4}$$

которые называются *канонически уравнениями прямой в пространстве*.

Предположим теперь, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой. Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие уравнения, которые называются *уравнениями прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{5}$$

Два замечания

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

Замечание 8.1

Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3) *и* (4), *то вектор с координатами* (q, r, s) *является ее направляющим вектором.* □

Замечание 8.2

Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3), (4) *и* (5) , *то точка с координатами* (x_0, y_0, z_0) *принадлежит прямой.* □

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть ℓ — прямая, являющаяся пересечением плоскостей σ_1 и σ_2, а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — общие уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*. Из того, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, вытекает, что либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (см. теорему 7.2). Теорема со следующего слайда показывает, что понятие общих уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия общих уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Теорема 8.1

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая в пространстве может быть задана уравнениями вида (6), в которых либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, *либо* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. *Обратно, любые уравнения вида (6) с указанным ограничением на числа* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 *и* C_2 *определяют прямую.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим систему (6). Каждое из двух уравнений, входящих в эту систему, задает некоторую плоскость. Эти две плоскости пересекаются, поскольку коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (6) не пропорциональны (см. теорему 7.2). Ясно, что прямая, по которой пересекаются эти плоскости, задается системой (6). $\square$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (1)

Замечание 6.3 указывает простой способ нахождения направляющего вектора прямой на плоскости, заданной общим уравнением. Рассмотрим аналогичную задачу для прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями (6). Требуется найти координаты ее направляющего вектора. По условию либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты некоторой точки, принадлежащей прямой ℓ. Тогда справедливы равенства $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$. Вычтем первое из этих равенств из первого уравнения системы (6), а второе — из второго уравнения этой системы. Получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (2)

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$. Поскольку $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, определитель этой системы отличен от нуля. По теореме Крамера для систем второго порядка ее решение можно найти по следующим формулам:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \text{а} \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Используя, что общий множитель элементов столбца можно выносить за знак определителя, а при перестановке двух столбцов местами определитель меняет знак на противоположный (см. свойства 1) и 3) определителей в § 0), получаем, что

$$x - x_0 = \frac{(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \text{а} \quad y - y_0 = \frac{-(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (3)

Следовательно,

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

откуда

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Мы получили канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями (6). В силу замечания 8.1 справедливо следующее утверждение.

Замечание 8.2

Вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \tag{7}$$

является направляющим вектором прямой, заданной уравнениями (6). □

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (1)

Мы вывели замечание 8.2 в предположении, что система координат — произвольная. Формулы получились достаточно громоздкими и трудными для запоминания. Однако в случае, когда система координат — прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод).

Итак, предположим, что прямая ℓ задана системой уравнений (6) в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым уравнением системы (6), через σ_1 и σ_2 соответственно. Векторы $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ являются теперь нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно (см. замечание 7.5). Положим $\vec{b} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n_1}$. Поскольку $\vec{n_1} \perp \sigma_1$, получаем, что $\vec{b} \parallel \sigma_1$. Аналогично проверяется, что $\vec{b} \parallel \sigma_2$. Но тогда $\vec{b}$ коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2, т. е. прямой ℓ. Далее, из того, что плоскости σ_1 и σ_2 не параллельны и не совпадают, вытекает, что $\vec{n_1} \nparallel \vec{n_2}$. В силу 2-го критерия коллинеарности векторов (см. предложение 11.1), $\vec{b} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq \vec{0}$. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является направляющим вектором прямой ℓ.

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (2)

Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности те координаты, которые указаны в правой части равенства (7) (см. формулу (3) в § 3). Итак, справедливо

Замечание 8.3

Если в прямоугольной декартовой системе координат прямая задана как пересечение двух плоскостей, то в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей. $\square$

Отметим еще, что

- направляющий вектор прямой ℓ, заданной уравнениями (6), можно найти не используя замечаний 8.2 и 8.3.

В самом деле, найдем координаты двух различных точек M_1 и M_2, принадлежащих ℓ (т. е. два различных решения (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) системы уравнений (6)). Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, очевидно, будет направляющим вектором прямой ℓ. Этот способ применим в любой системе координат.

Мы завершили рассмотрение видов уравнений прямой в пространстве.

Перейдем к вопросам о взаимном расположении прямой и плоскости и о взаимном расположении двух прямых.

8.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Теорема 8.2

Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая ℓ — уравнениями (3). Тогда:

1) *ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$;*
2) *ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;*
3) *ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z и t:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st. \end{cases} \tag{8}$$

Подставим правые части трех последних уравнений этой системы вместо x, y и z в первое уравнение. Получим уравнение

$$A(x_0+qt)+B(y_0+rt)+C(z_0+st)+D=0,$$

которое можно переписать в виде

$$(Aq+Br+Cs)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \qquad (9)$$

Ясно, что если $Aq+Br+Cs\neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение. Но тогда система (8) также имеет единственное решение, и потому прямая ℓ и плоскость σ пересекаются. Если $Aq+Br+Cs=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то уравнение (9) не имеет решений. В этом случае система (8) также не имеет решений, и потому ℓ и σ параллельны. Наконец, если $Aq+Br+Cs=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то уравнение (9) имеет бесконечно много решений. В этом случае система (8) также имеет бесконечно много решений, и потому ℓ лежит в σ.

Мы доказали достаточность в каждом из утверждений 1)–3). После этого необходимость в каждом из них легко доказывается аналогично тому, как была доказана необходимость в утверждениях 1)–3) теоремы 6.2. □

8.4. Взаимное расположение двух прямых

Теорема 8.3

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}.$$

1) ℓ_1 *и* ℓ_2 *скрещиваются тогда и только тогда, когда* $\Delta \neq 0$;
2) ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$ *и либо* $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$, *либо* $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$;
3) ℓ_1 *и* ℓ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда* $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ *и либо* $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$, *либо* $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$;
4) ℓ_1 *и* ℓ_2 *совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ *и* $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$.

Взаимное расположение двух прямых (2)

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ — направляющий вектор прямой ℓ_1; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ — направляющий вектор прямой ℓ_2; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_1; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_2; $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из замечания 12.2.

Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости. Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Вновь используя замечание 12.2 и учитывая критерий коллинеарности векторов, получаем утверждение 2).

Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1. Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае — параллельны. Вновь используя критерий коллинеарности векторов и учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{r_1} = \frac{z-z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3) и 4). $\square$

8.5. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Наша ближайшая цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0), принадлежащую прямой ℓ, обозначим через M_0, а вектор с координатами (q, r, s), являющийся направляющим вектором прямой ℓ, — через $\vec{a}$. Кроме того, положим $\vec{c} = \overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 1.

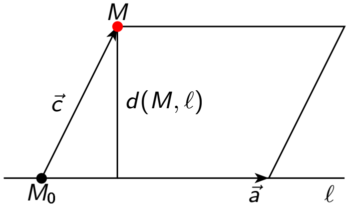

Рис. 1. Расстояние от точки до прямой

Обозначим расстояние от точки M до прямой ℓ через $d(M,\ell)$. Ясно, что $d(M,\ell)$ — высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Обозначим его площадь через S. Тогда $d(M,\ell) = \frac{S}{|\vec{a}|}$. Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов, мы получаем, что

$$d(M,\ell) = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве. Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 3, можно в явном виде выразить $d(M,\ell)$ через координаты точек M_0 и M и вектора $\vec{a}$:

$$d(M,\ell) = \sqrt{\frac{\big(r(z_1-z_0)-s(y_1-y_0)\big)^2+\big(q(z_1-z_0)-s(x_1-x_0)\big)^2+ \\ +\big(q(y_1-y_0)-r(x_1-x_0)\big)^2}{q^2+r^2+s^2}}.$$

8.6. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Наша следующая цель — научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Прежде, чем выводить соответствующую формулу, надо сказать, что понимается под таким расстоянием. Для этого нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым ℓ_1 и ℓ_2 называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающая каждую из них.

Ни из каких априорных соображений не вытекает, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым существует. Докажем, что это так.

Теорема 8.4

Для произвольных скрещивающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 существует общий перпендикуляр к этим прямым.

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (2)

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2 на следующем слайде. Пусть $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ — направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Ясно, что эти векторы не коллинеарны, так как в противном случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 были бы параллельными или совпадали бы. Обозначим через σ плоскость, проходящую через ℓ_1 параллельно ℓ_2, а через ℓ_2' — ортогональную проекцию ℓ_2 на плоскость σ. Поскольку $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, прямые ℓ_1 и ℓ_2' пересекаются. Обозначим точку их пересечения через M. Поскольку $M \in \ell_2'$, из построения прямой ℓ_2' вытекает, что точка M является ортогональной проекцией на плоскость σ некоторой точки $N \in \ell_2$. Очевидно, что прямая MN перпендикулярна каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 и пересекает каждую их них. Следовательно, эта прямая является общим перпендикуляром к ℓ_1 и ℓ_2. $\square$

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (3)

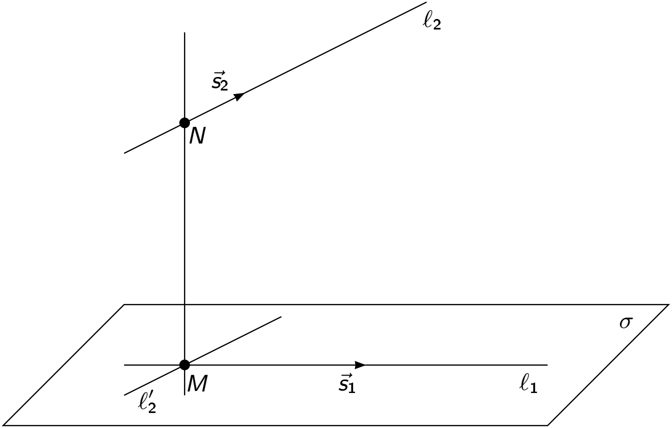

Рис. 2. Построение общего перпендикуляра

Расстояние между скрещивающимися прямыми (1)

Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2 и обозначается через $d(\ell_1, \ell_2)$.

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида A_1A_2, где $A_1 \in \ell_1$, а $A_2 \in \ell_2$.

Для того, чтобы вывести формулу расстояния между скрещивающимися прямыми, продолжим построения, начатые при доказательстве теоремы 8.4. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3 на следующем слайде. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — скрещивающиеся прямые, ℓ — их общий перпендикуляр, $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ — направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, M — точка пересечения прямых ℓ и ℓ_1, а N — точка пересечения прямых ℓ и ℓ_2. Возьмем произвольные точки $A_1 \in \ell_1$ и $A_2 \in \ell_2$. Обозначим через B и C концы направленных отрезков, которые получатся, если отложить от точки A_1 векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ соответственно. Построим параллелепипед на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$. Ясно, что расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 (т. е. длина отрезка MN) совпадает с длиной высоты этого параллелепипеда, опущенной из точки A_2. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Длина высоты параллелепипеда равна частному от деления его объема на площадь основания. Таким образом, чтобы найти расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, надо объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, разделить на площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$.

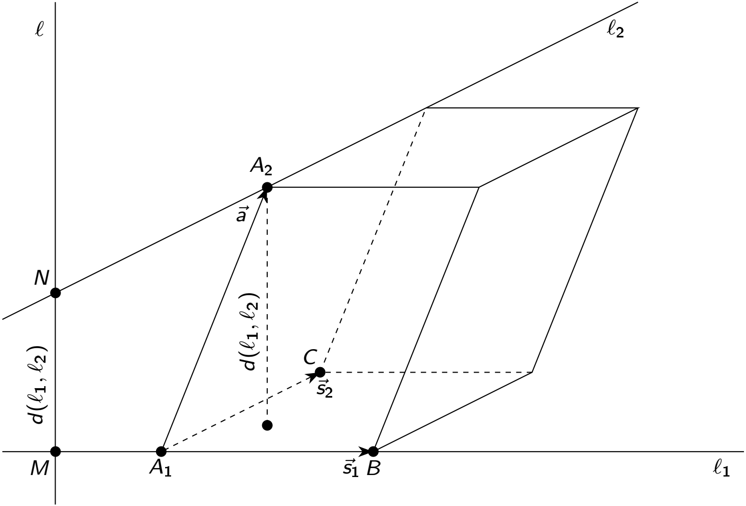

Рис. 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов, мы получаем, что

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\,\vec{a}\vec{s_1}\,\vec{s_2}\,|}{|\,\vec{s_1} \times \vec{s_2}\,|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 3 и формулу (4) из § 4, можно в явном виде выразить $d(\ell_1, \ell_2)$ через координаты точек M_1 и M_2 и векторов $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$. Обозначим координаты точек M_1 и M_2 через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, а координаты векторов $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$ — через (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) соответственно. Тогда:

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}}$$

(символом mod здесь, как и в формуле (6) из § 3, обозначен модуль определителя).