§ 7. Плоскость

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Этот параграф посвящен изучению плоскости. Он построен по тому же плану, что и предыдущий. Многие утверждения схожи как по формулировкам, так и по доказательствам. Иногда все отличия в доказательствах сводятся к появлению у точек и векторов третьих координат. В этих случаях мы не приводим доказательство в явном виде, ограничиваясь указанием на его сходство с доказательством аналогичного утверждения для прямой на плоскости.

7.1. Общее и параметрические уравнения поверхности

Подобно тому, как прямая является частным случаем кривой, плоскость является частным случаем поверхности. В конце нашего курса (в § 13–16) будут изучаться поверхности, которые не являются плоскостью. Поэтому в начале этого параграфа мы скажем несколько слов о произвольных поверхностях.

Как и кривые на плоскости, поверхности можно задавать с помощью уравнений двумя способами. Первый из них состоит в том, чтобы указать, как связаны между собой координаты точек, лежащих на поверхности (и только этих точек). Этот подход приводит к следующему определению.

Определение

Будем считать, что в пространстве зафиксирована система координат. Уравнение вида $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — произвольная функция от трех переменных, называется *общим уравнением* поверхности σ, если точка пространства лежит на σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, называется *геометрическим образом* этого уравнения.

В качестве примера рассмотрим сферу. Как известно из школьного курса, сфера радиуса r с центром в точке $C(a, b, c)$ задается (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,$$

которое равносильно общему уравнению

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0.$$

Второй способ задания поверхности уравнениями, как и в случае кривой на плоскости, состоит в том, что указывается не зависимость между координатами точек, которые принадлежат данной поверхности, а зависимость каждой из этих координат от некоторых параметров (отличие от кривых состоит в том, что для задания поверхности требуется не один параметр, а два). Этот подход приводит к следующему определению.

Определение

Будем считать, что в пространстве зафиксирована система координат. Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v), \\ z = h(u,v), \end{cases}$$

где $f(u,v)$, $g(u,v)$ и $h(u,v)$ — произвольные функции от двух переменных, называются *параметрическими уравнениями* поверхности σ, если точка M с координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на σ тогда и только тогда, когда существуют числа u_0 и v_0 такие, что $x_0 = f(u_0, v_0)$, $y_0 = g(u_0, v_0)$ и $z_0 = h(u_0, v_0)$. Переменные u и v называются *параметрами*.

В качестве примера рассмотрим сферу радиуса r с центром в начале координат. Пусть M — произвольная точка пространства, а M' — ее проекция на плоскость Oxy. Обозначим через u угол между положительным направлением оси Ox и радиусом-вектором точки M', а через v — угол между положительным направлением оси Oz и радиусом-вектором точки M (см. рис. 1).

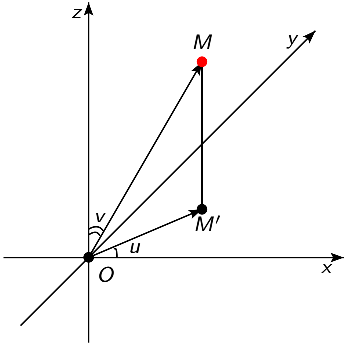

Рис. 1. Параметры для сферы

Пусть σ — сфера радиуса r с центром в начале координат. Ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = r\cos u\sin v, \\ y = r\sin u\sin v, \\ z = r\cos v. \end{cases} \tag{1}$$

В самом деле, если точка M имеет координаты (x, y, z), которые удовлетворяют равенствам (1), то

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2 v(\cos^2 u + \sin^2 u) + r^2\cos^2 v = \\ = r^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = r^2,$$

и потому $M \in \sigma$.

Обратно, пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит σ. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2. Обозначим через M' и N проекции точки M на плоскость Oxy и ось Oz соответственно, а через K и L — проекции точки M' на оси Ox и Oy соответственно. Из $\triangle OMN$ ясно, что $z_0 = |ON| = r\cos v$ и $|OM'| = |MN| = r\sin v$. А из последнего равенства и $\triangle OKM'$ получаем, что $x_0 = |OK| = |OM'|\cos u = r\cos u \sin v$, а $y_0 = |OL| = |KM'| = |OM'|\sin u = r\sin u\sin v$. Таким образом, координаты точки M удовлетворяют равенствам (1).

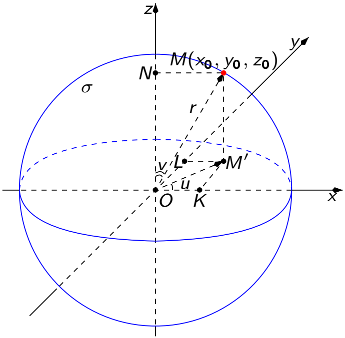

Рис. 2. Параметризация сферы

7.2. Виды уравнений плоскости

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению плоскости. Прежде всего, введем в рассмотрение следующие два понятия, которые будут играть исключительно важную роль в дальнейшем.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной плоскости, называется ее *направляющим вектором*. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Из этого определения видно, что

- как направляющий, так и нормальный вектор для данной плоскости определены неоднозначно. Плоскость имеет бесконечно много направляющих векторов и бесконечно много (коллинеарных друг другу) нормальных векторов.

Перейдем к рассмотрению видов уравнений плоскости. Мы рассмотрим пять видов таких уравнений: параметрические, каноническое, по трем точкам, общее и в отрезках. По сравнению с видами уравнений прямой на плоскости, указанными в § 6, здесь отсутствует лишь аналог уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Выясним, как выглядят параметрические уравнения плоскости. Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке O. Пусть σ — плоскость, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости σ, а векторы $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ и $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r}_0$, а радиус-вектор точки M — через $\vec{r}$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3.

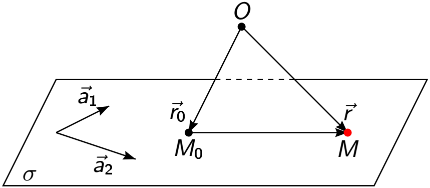

Рис. 3. К выводу параметрических уравнений плоскости

Ясно, что точка M лежит в плоскости σ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен σ. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис плоскости σ. Если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и плоскость σ коллинеарны, то, в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости, существуют числа u и v такие, что $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$. Обратно, очевидно, что если $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$. Таким образом, $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v. Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v. Координаты векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ совпадают с координатами точек M и M_0 соответственно. Расписав равенство $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1 u + q_2 v, \\ y = y_0 + r_1 u + r_2 v, \\ z = z_0 + s_1 u + s_2 v, \end{cases} \tag{2}$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости*.

Понятие параметрических уравнений плоскости является частным случаем понятия параметрических уравнений поверхности, которое было введено в начале данного параграфа.

Как было показано выше, точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Из замечания 12.2 вытекает, что это условие эквивалентно выполнению равенства

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

которое называется *канонически уравнением плоскости*.

- Каноническое уравнение плоскости аналогично одному из двух указанных в § 6 способов записи канонического уравнения прямой на плоскости (см. уравнение (5) в § 6).

Предположим теперь, что мы знаем координаты трех точек, принадлежащих плоскости и не лежащих на одной прямой, — $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ коллинеарны плоскости и не коллинеарны между собой (последнее гарантировано тем обстоятельством, что точки M_0, M_1 и M_2 не лежат на одной прямой). Подставляя их координаты в уравнение (3), получаем следующее уравнение, которое называется *уравнением плоскости по трем точкам*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

- Как и в случае с каноническим уравнением, это уравнение можно считать аналогичным уравнению прямой на плоскости по двум точкам (см. уравнение (6) в § 6), поскольку последнее уравнение можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Два замечания

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

Замечание 7.1

Если плоскость задана любым из уравнений (2) и (3), то векторы с координатами (q_1, r_1, s_1) и (q_2, r_2, s_2) являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой.

Замечание 7.2

Если плоскость задана любым из уравнений (2), (3) и (4), то точка с координатами (x_0, y_0, z_0) принадлежит плоскости.

Общее уравнение плоскости (1)

Разложив определитель из равенства (3) по первой строке, имеем следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Положив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (6)$$

Легко понять, что если $A = B = C = 0$, то $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$. В силу критерия коллинеарности векторов это означает, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны вопреки их выбору. Уравнение вида (6), в котором по крайней мере одно из чисел A, B и C отлично от нуля, называется *общим уравнением плоскости*. Теорема со следующего слайда показывает, что это понятие является частным случаем понятия общего уравнения поверхности, которое было введено в начале данного параграфа.

Теорема 7.1

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана уравнением вида (6), в котором по крайней мере одно из чисел A, B и C отлично от нуля. Обратно, любое уравнение вида (6) с указанным ограничением на числа A, B и C определяет плоскость.

Доказательство. Первое утверждение теоремы было доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим уравнение (6), где $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$. Предположим сначала, что $A \neq 0$. Возьмем произвольное решение (x_0, y_0, z_0) уравнения (6). Обозначим через M_0 точку с координатами (x_0, y_0, z_0). Положим $\vec{s_1} = (-B, A, 0)$ и $\vec{s_2} = (-C, 0, A)$. Из того, что $A \neq 0$ вытекает, что векторы $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$ непропорциональны, а значит и не коллинеарны. Обозначим через σ плоскость, проходящую через точку M_0 коллинеарно векторам $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$. Докажем, что плоскость σ задается уравнением (6).

Запишем каноническое уравнение плоскости σ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Раскрывая определитель из левой части этого равенства по первой строке, имеем $A^2(x-x_0)+AB(y-y_0)+AC(z-z_0)=0$. Разделив это уравнение на A, получим $Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0$. Поскольку (x_0,y_0,z_0) — решение уравнения (6), $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$. Следовательно, уравнение (7) равносильно уравнению (6).

Если отличен от нуля один из коэффициентов B и C, доказательство проводится аналогично. Надо только в случае, когда $B\neq 0$, рассмотреть векторы $\vec{s}_1=(-B,A,0)$ и $\vec{s}_2=(0,-C,B)$, а в случае, когда $C\neq 0$, — векторы $\vec{s}_1=(-C,0,A)$ и $\vec{s}_2=(0,-C,B)$. □

Из доказательства теоремы 7.1 легко выводится следующий факт.

Замечание 7.3

Пусть плоскость задана общим уравнением (6). Положим $\vec{s}_1=(-B,A,0)$, $\vec{s}_2=(-C,0,A)$ *и* $\vec{s}_3=(0,-C,B)$. *Тогда по крайней мере два из векторов* $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$ *не коллинеарны и являются направляющими векторами плоскости (если* $A\neq 0$, *то этими свойствами обладают векторы* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_2$, *если* $B\neq 0$ *— векторы* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_3$, *а если* $C\neq 0$ *— векторы* $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$*).* □

Определение

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *главным вектором* плоскости π.

Отметим, что главный вектор плоскости определен неоднозначно. В самом деле, ясно, что если t — ненулевое число, то уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ и $tAx + tBy + tCz + tD = 0$ определяют одну и ту же плоскость, главными векторами которой будут как (A, B, C), так и (tA, tB, tC).

Замечание 7.4

Главный вектор плоскости не коллинеарен этой плоскости. $\square$

Мы опускаем доказательство этого факта, поскольку оно вполне аналогично доказательству замечания 6.4.

Еще одно замечание

Если система координат является прямоугольной декартовой, то замечание 7.4 можно существенно усилить. В самом деле, в этом случае скалярное произведение векторов (A, B, C) и $(-B, A, 0)$ равно $-AB + BA = 0$, т. е. эти векторы ортогональны (см. критерий ортогональности векторов в § 2). Аналогично проверяется ортогональность вектора (A, B, C) каждому из векторов $(-C, 0, A)$ и $(0, -C, B)$. В силу замечания 7.3 вектор (A, B, C) ортогонален к двум неколлинеарным векторам, лежащим в плоскости с уравнением (6). Следовательно, справедливо

Замечание 7.5

Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор плоскости является ее нормальным вектором. Другими словами, если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (6), то вектор с координатами (A, B, C) является ее нормальным вектором. □

Пусть теперь σ — плоскость, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Тогда σ пересекает все три оси координат. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 4. Обозначим первую координату точки пересечения σ с осью абсцисс через a, вторую координату точки пересечения σ с осью ординат — через b, а третью координату точки пересечения σ с осью аппликат — через c. Тогда $a, b, c \neq 0$ и σ проходит через точки с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.

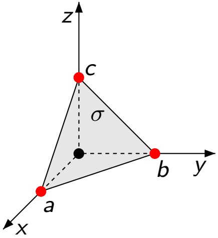

Рис. 4. К выводу уравнения плоскости в отрезках

Напишем уравнение плоскости σ по точкам $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель из левой части последнего равенства, получим $bcx + acy + abz = abc$. Разделим обе части последнего равенства на abc (воспользовавшись тем, что $a, b, c \neq 0$). Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{8}$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*. Этот термин объясняется тем, что параметры a, b и c, фигурирующие в уравнении (8), суть, с точностью до знака, длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат. Отметим очевидную аналогию между уравнением (8) и уравнением прямой в отрезках (см. уравнение (10) в § 6).

Мы закончили рассмотрение видов уравнений плоскости.

7.3. Взаимное расположение двух плоскостей

Рассмотрим теперь вопрос о взаимном расположении двух плоскостей.

Теорема 7.2

Пусть плоскость σ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а плоскость σ_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскости σ_1 и σ_2:

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ *или* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
2) *параллельны тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;
3) *совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. Докажем достаточность в утверждении 1). Предположим, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Для определенности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Убедимся, что в этом случае плоскости пересекаются.

Точка принадлежит пересечению плоскостей σ_1 и σ_2 тогда и только тогда, когда ее координаты являются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Придадим z произвольное значение $z = z_0$ и запишем систему (9) в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2. \end{cases} \tag{10}$$

Условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому по теореме Крамера для систем второго порядка система (10) имеет единственное решение. Обозначим его через (x_0, y_0). Тогда тройка чисел (x_0, y_0, z_0) будет решением системы (9). Следовательно, плоскости σ_1 и σ_2 имеют по крайней мере одну общую точку, т. е. либо пересекаются, либо совпадают.

Предположим, что плоскости σ_1 и σ_2 совпадают. Обозначим через σ_3 плоскость с уравнением $z = z_0$. Пересечение (совпадающих) плоскостей σ_1 и σ_2 с σ_3 содержит точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а значит, оно содержит и некоторую прямую. У всех точек этой прямой третья координата равна z_0 (так как эти точки лежат в плоскости σ_3). Пусть $M_1(x_1, y_1, z_0)$ — точка этой прямой, отличная от M_0. Тогда пара чисел (x_1, y_1) отлична от (x_0, y_0) и является решением системы (10). Но, как отмечалось выше, эта система имеет единственное решение.

Полученное противоречие показывает, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются.

Мы доказали достаточность в утверждении 1) доказываемой теоремы. Достаточность в утверждениях 2) и 3) доказывается вполне аналогично тому, как это сделано в тех же случаях в доказательстве теоремы 6.2. После того, как достаточность во всех трех утверждениях доказана, легко понять, что в каждом из этих утверждений верна и необходимость (см. конец доказательства теоремы 6.2). $\square$

Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие 7.1

Любые два главных вектора плоскости коллинеарны. $\square$

Мы не приводим доказательство этого факта, потому что оно абсолютно аналогично доказательству следствия 6.1.

7.4. Пучок плоскостей

Определение

Пучком плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через некоторую фиксированную прямую.

Ясно, что любые две пересекающиеся плоскости π_1 и π_2 определяют некоторый пучок плоскостей (состоящий из всех плоскостей, проходящих через прямую, по которой пересекаются плоскости π_1 и π_2). Теорема, формулируемая на следующем слайде, показывает, как по уравнениям плоскостей π_1 и π_2 можно найти уравнение произвольной плоскости из пучка плоскостей, определяемых этими двумя плоскостями.

Теорема 7.3

Пусть π_1 и π_2 — пересекающиеся плоскости, первая из которых задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а вторая — уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскость π принадлежит пучку плоскостей, определяемому плоскостями π_1 и π_2, тогда и только тогда, когда π задается уравнением вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (11)$$

где α и β — произвольные действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля.

Доказательство. *Достаточность*. Прежде всего, докажем, что уравнение (11), где хотя бы одно из чисел α и β отлично от 0, задает плоскость. В силу теоремы 7.1 для этого достаточно установить, что по крайней мере одно из чисел $\alpha A_1 + \beta A_2$, $\alpha B_1 + \beta B_2$ и $\alpha C_1 + \beta C_2$ отлично от нуля. Предположим, напротив, что $\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0$. Тогда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Но тогда из теоремы 7.2 вытекает, что плоскости π_1 и π_2 либо параллельны, либо совпадают, что противоречит условию.

Пучок плоскостей (3)

Осталось доказать, что плоскость, заданная уравнением (11), проходит через прямую, по которой пересекаются плоскости π_1 и π_2. В самом деле, обозначим через (x_0, y_0, z_0) координаты произвольной точки, лежащей на этой прямой. Тогда $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$, откуда

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0.$$

Необходимость. Обозначим через ℓ прямую, по которой пересекаются плоскости π_1 и π_2. Пусть π — плоскость из пучка плоскостей, определяемого плоскостями π_1 и π_2, а $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости π. Если $\pi = \pi_1$, то π задается уравнением вида (11), где $\alpha = 1$, а $\beta = 0$. Аналогично разбирается случай, когда $\pi = \pi_2$. Будем теперь считать, что плоскость π отлична от плоскостей π_1 и π_2. В частности, это означает, что плоскость π пересекается с каждой из плоскостей π_1 и π_2, причем ясно, что π пересекается с каждой из этих плоскостей по прямой ℓ. Обозначим через M произвольную точку, принадлежащую плоскости π и не лежащую на прямой ℓ, а через (x', y', z') — координаты точки M. Ясно, что $M \notin \pi_1$, так как в противном случае точка M принадлежала бы прямой, по которой пересекаются плоскости π и π_1, т. е. прямой ℓ. Аналогично проверяется, что $M \notin \pi_2$. Следовательно, $A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1 \neq 0$ и $A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2 \neq 0$.

Пучок плоскостей (4)

Положим $\alpha_0 = -(A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2)$ и $\beta_0 = A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1$. Тогда $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$.

Как проверено при доказательстве достаточности, всякое уравнение вида (11), где хотя бы одно из чисел α и β отлично от 0, задает некоторую плоскость. В частности, это справедливо по отношению к уравнению

$$\alpha_0(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta_0(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Обозначим плоскость, задаваемую этим уравнением, через σ и докажем, что $\sigma = \pi$. Напомним, что $\ell \subseteq \pi$ и $M \in \pi$. Очевидно, что плоскость, проходящая через некоторую прямую и не лежащую на этой прямой точку, определена однозначно. Поэтому достаточно установить, что σ содержит прямую ℓ и проходит через точку M. Первый факт вытекает из того, что, как показано при доказательстве достаточности, ℓ лежит в любой плоскости, заданной уравнением вида (11). Второе утверждение вытекает из того, что

$$\alpha_0(A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1) + \beta_0(A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2) = \alpha_0\beta_0 - \beta_0\alpha_0 = 0.$$

Теорема доказана. $\square$

7.5. Полупространства

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выяснить, как по уравнению плоскости и координатам двух точек, не лежащих в этой плоскости, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от плоскости. Пусть σ — плоскость, заданная уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Все пространство делится этой плоскостью на три непересекающиеся части: саму плоскость σ и два *полупространства* (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от σ). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 5.

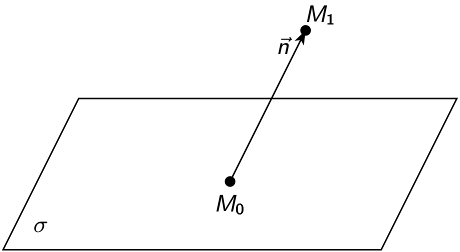

Рис. 5. Полупространства

Обозначим главный вектор плоскости σ через $\vec{n}$. Возьмем на σ произвольную точку M_0 и отложим от нее вектор $\vec{n}$. Конец получившегося направленного отрезка обозначим через M_1. Из замечания 7.4 вытекает, что точка M_1 не принадлежит плоскости σ.

Определения

Полупространство, в котором лежит точка M_1, называется *положительным*, а другое полупространство — *отрицательным*.

- Если умножить общее уравнение плоскости на -1, то плоскость не изменится, а ее главный вектор сменит направление на противоположное. Ясно, что в результате положительное полупространство станет отрицательным и наоборот. Таким образом, *свойство полупространства быть положительным или отрицательным зависит не от самой плоскости, а от того, каким уравнением она задана*.

Следующее предложение объясняет происхождение терминов «положительное» и «отрицательное» полупространство.

Предложение 7.1

Пусть $M(x', y', z')$ — произвольная точка пространства. Если M лежит в положительном полупространстве, то $Ax' + By' + C > 0$, а если M лежит в отрицательном полупространстве, то $Ax' + By' + Cz' + D < 0$. □

Доказательство этого предложения мы не приводим, поскольку оно вполне аналогично доказательству предложения 6.1.

Из предложения 7.1 вытекает следующий ответ на сформулированный выше вопрос.

Следствие 7.2

Точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ расположены по одну сторону от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой плоскости тогда и только тогда, когда эти числа имеют разные знаки. □

7.6. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями

В оставшейся части данного параграфа предполагается, что система координат, заданная в пространстве, — прямоугольная декартова.

Пусть плоскость σ задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а $M(x', y', z')$ — некоторая точка пространства. Обозначим через $d(M, \sigma)$ расстояние от M до σ. Тогда справедлива следующая формула:

$$d(M, \sigma) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12}$$

Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он вполне аналогичен выводу формулы (15) из § 6.

Формула (12) позволяет вывести формулу расстояния между параллельными плоскостями. Предположим, что плоскости σ_1 и σ_2 параллельны, σ_1 имеет уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а σ_2 — уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Рассуждения, аналогичные проведенным при выводе формулы (16) в § 6, позволяют считать, что

$$A_1 = A_2, B_1 = B_2 \text{ и } C_1 = C_2. \qquad (13)$$

Обозначим расстояние между σ_1 и σ_2 через $d(\sigma_1, \sigma_2)$. Тогда

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Подчеркнем, что эту формулу можно применять только при условии, что выполнены равенства (13). Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он вполне аналогичен выводу формулы (17) из § 6.