Часть II. Прямые и плоскости

§ 6. Прямая на плоскости

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

6.1. Общее и параметрические уравнения кривой на плоскости

Этот и два следующих параграфа посвящены изучению прямых и плоскостей. Прямая является частным случаем кривой. В дальнейшем (в § 9–12) нам предстоит иметь дело с кривыми, которые не являются прямыми. Поэтому прежде, чем переходить к основной теме данного параграфа (изучению прямой на плоскости), мы скажем несколько слов о произвольных плоских кривых.

- Мы не будем давать точного определения кривой — этот не простой вопрос выходит за рамки данного курса (определение кривой дается в курсе дифференциальной геометрии). Для целей нашего курса достаточно будет придерживаться «примитивно-наивной» точки зрения (строго говоря, неверной), согласно которой кривая — это то, что можно нарисовать, не отрывая ручки от листа бумаги. Или, в крайнем случае, то, что состоит из нескольких таких частей (см. рис. 1).

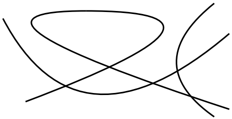

Рис. 1. Кривая

Общее уравнение кривой

Задавать кривые с помощью уравнений можно двумя принципиально различными способами. Первый из них состоит в том, чтобы явно указать, как связаны между собой координаты точек, принадлежащих кривой (и только этих точек). Этот подход приводит к следующему определению.

Определение

Пусть π — плоскость, в которой зафиксирована система координат, а ℓ — кривая, лежащая в этой плоскости. Уравнение вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — произвольная функция от двух переменных, называется *общим уравнением* кривой ℓ, если точка M, принадлежащая π, лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, называется *геометрическим образом* этого уравнения.

Почти все кривые, изучавшиеся в школьном курсе математики, задавались уравнениями вида $y = f(x)$. Ясно, что последнее уравнение равносильно уравнению $y - f(x) = 0$, т. е. является общим уравнением (роль функции $F(x, y)$ из определения общего уравнения кривой здесь играет функция $y - f(x)$). Единственной рассматриваемой в школе кривой, которая не задается уравнением вида $y = f(x)$, является окружность. Но и она задается общим уравнением. В самом деле, как известно, окружность радиуса r с центром в точке (a, b) задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, которое равносильно общему уравнению $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ (в дальнейшем мы не будем делать различий между уравнениями $F(x, y) = c$ и $F(x, y) - c = 0$, где c — константа; первое из этих уравнений мы тоже будем называть общим уравнением кривой).

Далеко не все кривые можно задавать общими уравнениями. Во всяком случае, далеко не для всех кривых такие уравнения легко найти. Поэтому часто кривые задаются уравнениями другим способом. Идея этого другого способа состоит в том, чтобы указывать не связь между координатами точек, лежащих на кривой, а то, как каждая из координат этих (и только этих) точек выражается через некоторый параметр. Этот подход приводит к следующему определению.

Определение

Пусть π — плоскость, в которой зафиксирована система координат, а ℓ — кривая, лежащая в этой плоскости. Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \qquad (1)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции от одной переменной, называются *параметрическими уравнениями* кривой ℓ, если точка M с координатами (x_0, y_0), принадлежащая π, лежит на ℓ тогда и только тогда, когда существует число t_0 такое, что $x_0 = f(t_0)$ и $y_0 = g(t_0)$. Переменная t называется *параметром*.

Например, легко понять, что в прямоугольной декартовой системе координат параметрические уравнения окружности радиуса r с центром в начале координат имеют вид

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases} \tag{2}$$

где в качестве параметра t выступает угол между радиусом-вектором точки $M(x, y)$ и положительным направлением оси абсцисс. В самом деле, если координаты (x, y) точки M удовлетворяют этим равенствам, то $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$, и потому точка M лежит на нашей окружности. Обратно, из рис. 2 видно, что если точка лежит на этой окружности, то ее координаты удовлетворяют равенствам (2).

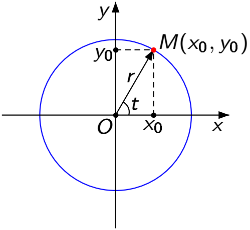

Рис. 2. Параметризация окружности

6.2. Виды уравнений прямой на плоскости

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению прямых на плоскости. Прежде всего, введем в рассмотрение следующие два понятия, которые будут играть исключительно важную роль в дальнейшем.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой на плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Из этого определения видно, что

- как направляющий, так и нормальный вектор для данной прямой определены неоднозначно. Прямая на плоскости имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов и бесконечно много (коллинеарных друг другу) нормальных векторов.

В школьном курсе математики под уравнением прямой понимается уравнение вида $y = kx + b$. В действительности это лишь один из многих видов уравнений прямой на плоскости. Он очень удобен во многих приложениях и при решении задач, но для полноценного изучения прямой на плоскости не годится, так как уравнение такого типа существует не у каждой прямой. В данном параграфе мы рассмотрим шесть видов уравнений прямой на плоскости: параметрические уравнения, каноническое уравнение, уравнение по двум точкам, общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом (это и есть то самое уравнение вида $y = kx + b$) и уравнение в отрезках. Отметим, что существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости (например, нормальное уравнение или уравнение прямой в полярной системе координат), но мы ограничились этими шестью видами как наиболее важными и наиболее часто возникающими при решении задач.

Выясним, как выглядят параметрические уравнения прямой на плоскости. Предположим, что на плоскости задана система координат с началом в точке O. Пусть ℓ — прямая на плоскости, и мы знаем, что точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой ℓ, а вектор $\vec{a} = (r, s)$ является ее направляющим вектором. Ясно, что эти данные однозначно определяют прямую. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r_0}$, а радиус-вектор точки M — через $\vec{r}$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3.

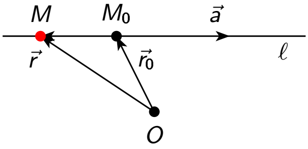

Рис. 3. К выводу параметрических уравнений прямой

Ясно, что точка M лежит на прямой ℓ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны. Напомним, что $\vec{a} \neq \vec{0}$ по определению направляющего вектора прямой. Поэтому, в силу критерия коллинеарности векторов, условие $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ равносильно тому, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого t. Поскольку $\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$ для некоторого t. По определению координат точки, координаты векторов $\vec{r}$ и $\vec{r_0}$ совпадают с координатами точек M и M_0 соответственно. Расписав равенство $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$ в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + rt, \\ y = y_0 + st, \end{cases} \qquad (3)$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*.

Понятие параметрических уравнений прямой на плоскости является частным случаем понятия параметрических уравнений кривой на плоскости, которое было введено в начале данного параграфа.

Выразив параметр t из первого и второго уравнений системы (3) и приравняв полученные выражения, мы получим равенство

$$\frac{x-x_0}{r}=\frac{y-y_0}{s}\,, \tag{4}$$

которое называется *канонческим уравнением прямой на плоскости*. Отметим, что то же самое уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ r & s \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

В самом деле, каждое из равенств (4) и (5) эквивалентны тому, что $s(x-x_0)-r(y-y_0)=0$.

Предположим теперь, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой. Подставляя его координаты в каноническое уравнение прямой, получаем следующее уравнение, которое называется *уравнением прямой на плоскости по двум точкам*:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\,. \tag{6}$$

Два замечания

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания, которые особенно полезно иметь в виду при решении задач.

Замечание 6.1

Если прямая задана любым из уравнений (3) *и* (4), *то вектор с координатами* (r, s) *является ее направляющим вектором.*

Замечание 6.2

Если прямая задана любым из уравнений (3), (4) *и* (6), *то точка с координатами* (x_0, y_0) *принадлежит прямой.*

Общее уравнение прямой (1)

Преобразуя уравнение (4), получаем $sx - ry - sx_0 + ry_0 = 0$. Положим $A = s$, $B = -r$ и $C = -sx_0 + ry_0$. Тогда наше уравнение примет вид

$$Ax + By + C = 0. \tag{7}$$

Отметим, что по крайней мере одно из чисел A и B отлично от нуля, поскольку числа r и s, будучи координатами направляющего вектора прямой, не могут быть одновременно равны нулю.

Определение

Уравнение вида (7), в котором по крайней мере одно из чисел A и B отлично от нуля, называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Следующая теорема показывает, что это понятие является частным случаем понятия общего уравнения кривой на плоскости, которое было введено в начале данного параграфа.

Теорема 6.1

Пусть на плоскости задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида (7), в котором по крайней мере одно из чисел A и B отлично от нуля. Обратно, любое уравнение вида (7) с указанным ограничением на числа A и B определяет прямую.

Доказательство. Первое утверждение теоремы было доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим уравнение (7), где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Пусть (x_0, y_0) — произвольное решение этого уравнения. Обозначим через ℓ прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $(-B, A)$. Докажем, что эта прямая задается уравнением (7). Напишем каноническое уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}. \tag{8}$$

Преобразовав это равенство, мы получим уравнение $A(x - x_0) = -B(y - y_0)$ или $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Поскольку (x_0, y_0) — решение уравнения (7), $-Ax_0 - By_0 = C$. Следовательно, уравнение (8) равносильно уравнению (7). □

В процессе доказательства теоремы 6.1 установлен следующий факт.

Замечание 6.3

Если прямая задана уравнением (7), то вектор с координатами $(-B, A)$ является ее направляющим вектором. □

Определение

Пусть прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *главным вектором* прямой ℓ.

Отметим, что главный вектор прямой определен неоднозначно. В самом деле, ясно, что если t — ненулевое число, то уравнения $Ax + By + C = 0$ и $tAx + tBy + tC = 0$ определяют одну и ту же прямую, главными векторами которой будут как (A, B), так и (tA, tB).

Замечание 6.4

Главный вектор прямой не коллинеарен этой прямой.

Доказательство. Пусть прямая ℓ задана уравнением (7), $\vec{n} = (A, B)$ и $M_0(x_0, y_0) \in \ell$, т. е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Отложим вектор $\vec{n}$ от точки M_0. Концом соответствующего направленного отрезка будет точка $M_1(x_0 + A, y_0 + B)$. Подставив координаты этой точки в левую часть уравнения прямой, получим

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 \neq 0.$$

Таким образом, $M_1 \notin \ell$. Поскольку $M_0 \in \ell$, а $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n}$, это означает, что вектор $\vec{n}$ и прямая ℓ не коллинеарны. $\square$

Еще одно замечание

В случае прямоугольной декартовой системы координат замечание 6.4 можно существенно усилить. В самом деле, в этом случае скалярное произведение векторов (A, B) и $(-B, A)$ равно $-AB + BA = 0$. В силу критерия ортогональности векторов эти векторы ортогональны. Учитывая еще замечание 6.3, получаем, что справедливо

Замечание 6.5

Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор прямой является ее нормальным вектором. Другими словами, если прямая задана уравнением (7) в прямоугольной декартовой системе координат, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором этой прямой. □

Предположим, что прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$. Тогда ее уравнение можно переписать в виде $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$. Положим $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y = kx + b. \tag{9}$$

Число k называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (9) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Из школьного курса математики известно, что если прямая ℓ задана (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением (9), то $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол между положительным направлением оси Ox и ℓ (именно этим объясняется термин «угловой коэффициент»).

Уравнение (9) выведено в предположении, что в уравнении (7) коэффициент B отличен от нуля. Выясним, когда выполняется это условие. Предположим, напротив, что $B = 0$. Тогда прямая задается уравнением вида $Ax + C = 0$. При этом $A \neq 0$, поскольку коэффициенты A и B одновременно в нуль обращаться не могут. Следовательно, наша прямая задается уравнением $x = -\frac{C}{A}$. Ясно, что прямые с уравнением такого вида и только они параллельны оси ординат. Таким образом,

- *прямая имеет уравнение с угловым коэффициентом тогда и только тогда, когда она не параллельна оси ординат.*

Пусть ℓ — прямая на плоскости, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Тогда ℓ пересекает обе оси координат. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 4.

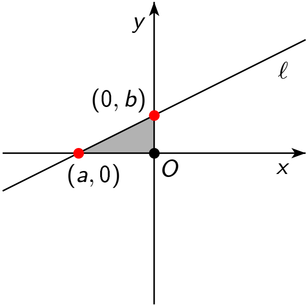

Рис. 4. К выводу уравнения прямой в отрезках

Обозначим первую координату точки пересечения прямой ℓ с осью абсцисс через a, а вторую координату точки пересечения прямой ℓ с осью ординат — через b. Тогда $a, b \neq 0$ и ℓ проходит через точки с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$. Напишем уравнение прямой ℓ по этим двум точкам:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},$$

или $b(x-a) = -ay$. После очевидных преобразований имеем $bx + ay = ab$. Разделим обе части последнего равенства на ab (воспользовавшись тем, что $a, b \neq 0$). Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (10)$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках*. Этот термин объясняется тем, что параметры a и b, фигурирующие в уравнении (10), суть, с точностью до знака, длины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат. Уравнение прямой в отрезках особенно полезно при решении задач, в которых идет речь о площади треугольника, отсекаемого прямой от осей координат (на рис. 4 этот треугольник выделен серым цветом). Ясно, что если прямая задана уравнением (10), то эта площадь равна $\frac{|ab|}{2}$.

Мы закончили рассмотрение видов уравнений прямой на плоскости.

6.3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Следующий вопрос, который мы рассмотрим, звучит так: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т. е. выяснить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Ответ на него дает

Теорема 6.2

Пусть прямая ℓ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая ℓ_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Прямые ℓ_1 и ℓ_2:

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;
2) *параллельны тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
3) *совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \tag{11}$$

Взаимное расположение двух прямых (2)

Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет единственное решение; параллельны тогда и только тогда, когда она не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда она имеет бесконечно много решений. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Это неравенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В силу теоремы Крамера для систем второго порядка система (11) имеет единственное решение, т. е. прямые пересекаются.

Случай 2: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Убедимся, что в этом случае прямые параллельны. Положим $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = t$. Тогда $A_1 = tA_2$ и $B_1 = tB_2$. Предположим, что система (11) имеет решение (x_0, y_0), т. е.

$$\begin{cases} tA_2x_0 + tB_2y_0 + C_1 = 0, \\ \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Умножим второе равенство на $-t$ и сложим его с первым. Получим $C_1 - C_2t = 0$, т. е. $\frac{C_1}{C_2} = t$, что противоречит неравенству $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Мы доказали, что прямые параллельны.

Случай 3: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Положим $\frac{A_1}{A_2} = t$. Тогда $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$, $C_1 = tC_2$, и первое уравнение системы (11) можно записать в виде $t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, причем $t \neq 0$ (так как в противном случае $A_1 = B_1 = 0$). Таким образом, первое уравнение системы (11) равносильно второму. Следовательно, они определяют одну и ту же прямую.

Таким образом, для каждого из трех случаев взаимного расположения прямых мы получили достаточное условие. Убедимся на примере случая пересечения прямых, что эти же условия являются и необходимыми. Пусть прямые пересекаются. Тогда условия случаев 2) и 3) из формулировки теоремы не выполняются, поскольку в противном случае прямые были бы либо параллельными, либо совпадающими. Следовательно, выполнено условие случая 1), т. е. $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$. Аналогично проверяется необходимость в случаях параллельности и совпадения прямых. Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие 6.1

Любые два главных вектора прямой коллинеарны.

Доказательство. Пусть $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ — два главных вектора прямой ℓ. Тогда эта прямая задается, с одной стороны, уравнением вида $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ для некоторого C_1, а с другой, — уравнением вида $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ для некоторого C_2. Поскольку эти уравнения задают одну и ту же прямую, из п. 3) теоремы 6.2 вытекает, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. В силу критерия коллинеарности векторов это означает, что $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$. $\square$

6.4. Пучок прямых

Определение

Пучком прямых называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку плоскости.

Ясно, что любые две пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 определяют некоторый пучок прямых (состоящий из всех прямых, проходящих через точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2). Следующая теорема показывает, как по уравнениям прямых ℓ_1 и ℓ_2 можно найти уравнение произвольной прямой из пучка прямых, определяемых этими двумя прямыми.

Теорема 6.3

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — пересекающиеся прямые, первая из которых задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а вторая — уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Прямая ℓ принадлежит пучку прямых, определяемому прямыми ℓ_1 и ℓ_2, тогда и только тогда, когда ℓ задается уравнением вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (12)$$

где α и β — произвольные действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть ℓ — прямая из пучка прямых, определяемого прямыми ℓ_1 и ℓ_2, а $Ax+By+C=0$ — общее уравнение прямой ℓ. Положим $\vec{n}=(A,B)$, $\vec{n}_1=(A_1,B_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2)$. Поскольку прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, из теоремы 6.2 вытекает, что $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$. С учетом критерия коллинеарности векторов это означает, что векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис той плоскости, в которой расположены все рассматриваемые прямые. В силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости, получаем, что $\vec{n}=\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2$ для некоторых чисел α и β. При этом по крайней мере одно из чисел α и β отлично от нуля, так как в противном случае $\vec{n}=\vec{0}$ вопреки определению общего уравнения прямой. Расписав равенство $\vec{n}=\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2$ в координатах, получаем, что $A=\alpha A_1+\beta A_2$ и $B=\alpha B_1+\beta B_2$. Это позволяет переписать уравнение прямой ℓ в виде $(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+C=0$ или

$$\alpha(A_1x+B_1y)+\beta(A_2x+B_2y)+C=0. \tag{13}$$

Обозначим координаты точки M_0, в которой пересекаются прямые ℓ_1 и ℓ_2, через (x_0,y_0). Поскольку эта точка принадлежит прямой ℓ, из (13) получаем, что

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0)+\beta(A_2x_0+B_2y_0)+C=0. \tag{14}$$

С другой стороны, точка M_0 принадлежит прямым ℓ_1 и ℓ_2, откуда $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$. Следовательно, $C_1 = -A_1x_0 - B_1y_0$ и $C_2 = -A_2x_0 - B_2y_0$. Отсюда и из (14) вытекает, что $-\alpha C_1 - \beta C_2 + C = 0$, т. е. $C = \alpha C_1 + \beta C_2$. Подставляя последнее выражение для C в (13), получаем, что уравнение прямой ℓ можно записать в виде

$$\alpha(A_1x + B_1y) + \beta(A_2x + B_2y) + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0.$$

Очевидно, что это уравнение равносильно уравнению (12).

Достаточность. Прежде всего, докажем, что уравнение (12) задает прямую. В силу теоремы 6.1 для этого достаточно установить, что по крайней мере одно из чисел $\alpha A_1 + \beta A_2$ и $\alpha B_1 + \beta B_2$ отлично от нуля. Предположим, напротив, что $\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$. Тогда $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{B_1}{B_2}$. Но тогда из теоремы 6.2 вытекает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 либо параллельны, либо совпадают, что противоречит условию. Осталось доказать, что прямая, заданная уравнением (12), проходит через точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2. В самом деле, если эта точка имеет координаты (x_0, y_0), то $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$, откуда $\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$. Теорема доказана. $\square$

6.5. Полуплоскости

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выяснить, как по уравнению прямой и координатам двух точек, не лежащих на этой прямой, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от прямой. Пусть ℓ — прямая, заданная уравнением $Ax + By + C = 0$. Вся плоскость делится этой прямой на три непересекающиеся части: саму прямую ℓ и две *полуплоскости* (в каждую из этих полуплоскостей входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от ℓ). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 5.

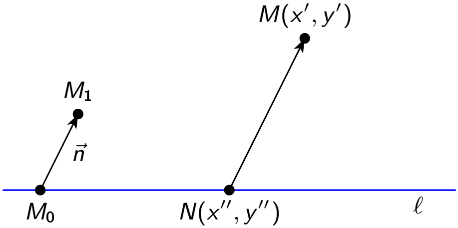

Рис. 5. Полуплоскости

Обозначим главный вектор прямой ℓ через $\vec{n}$. Возьмем на ℓ произвольную точку M_0 и отложим от нее вектор $\vec{n}$. Конец получившегося направленного отрезка обозначим через M_1. Из замечания 6.4 вытекает, что точка M_1 не принадлежит прямой ℓ.

Определения

Полуплоскость, в которой лежит точка M_1, называется *положительной*, а другая полуплоскость — *отрицательной*.

- Если умножить общее уравнение прямой на -1, то прямая не изменится, а ее главный вектор сменит направление на противоположное. Ясно, что в результате положительная полуплоскость станет отрицательной и наоборот. Таким образом, *свойство полуплоскости быть положительной или отрицательной зависит не от самой прямой, а от того, каким уравнением она задана*.

Предложение на следующем слайде объясняет происхождение терминов «положительная» и «отрицательная» полуплоскость.

Предложение 6.1

Пусть $M(x', y')$ — точка плоскости. Если M лежит в положительной полуплоскости, то $Ax' + By' + C > 0$, а если M лежит в отрицательной полуплоскости, то $Ax' + By' + C < 0$.

Доказательство. Предположим, что M лежит в положительной полуплоскости. Через точку M проведем прямую, коллинеарную вектору $\vec{n}$. Поскольку, в силу замечания 6.4 $\vec{n} \nparallel \ell$, проведенная нами прямая пересечет прямую ℓ. Обозначим точку пересечения через N, а ее координаты — через (x'', y''). Ясно, что $Ax'' + By'' + C = 0$. Векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ сонаправленны, т. е. $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}$ для некоторого $t > 0$. Записав это векторное равенство в координатах, получим, что $x' - x'' = tA$ и $y' - y'' = tB$, откуда $x' = x'' + tA$ и $y' = y'' + tB$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Ax' + By' + C &= A(x'' + tA) + B(y'' + tB) + C = \\ &= Ax'' + By'' + C + t(A^2 + B^2) = t(A^2 + B^2) > 0. \end{aligned}$$

Первое утверждение предложения доказано. Второе доказывается вполне аналогично. Надо только учесть, что если M лежит в отрицательной полуплоскости, то векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ антинаправленны, и потому $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}$ для некоторого $t < 0$.

Из предложения 6.1 вытекает следующий ответ на поставленный выше вопрос.

Следствие 6.2

Точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ расположены по одну сторону от прямой $Ax + By + C = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой прямой тогда и только тогда, когда эти числа имеют разные знаки. $\square$

6.6. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

В оставшейся части данного параграфа предполагается, что система координат, заданная на плоскости, — прямоугольная декартова.

Пусть прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, а $M(x', y')$ — некоторая точка плоскости. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 6.

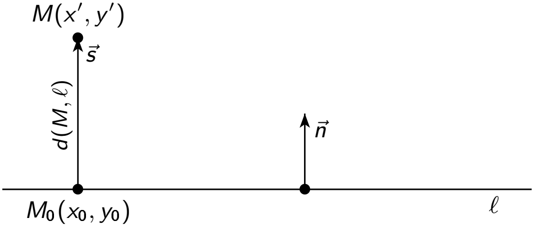

Рис. 6. К выводу формулы расстояния от точки до прямой

Обозначим через $M_0(x_0, y_0)$ ортогональную проекцию точки M на ℓ и положим $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M}$. Расстояние от M до ℓ обозначим через $d(M, \ell)$. Ясно, что $d(M, \ell) = |\,\vec{s}\,|$ и $\vec{s} = (x' - x_0, y' - y_0)$.

Поскольку система координат — прямоугольная декартова, то, в силу замечания 6.5, вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к ℓ. Поскольку вектор $\vec{s}$ также перпендикулярен к ℓ, получаем, что $\vec{s} \parallel \vec{n}$. Следовательно, угол между векторами $\vec{s}$ и $\vec{n}$ равен либо 0, либо π, и потому $\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \pm 1$. Отсюда вытекает, что $\vec{s}\vec{n} = \pm|\,\vec{s}\,| \cdot |\,\vec{n}\,|$. В силу сказанного,

$$d(M, \ell) = |\,\vec{s}\,| = \frac{|\,\vec{s}\,| \cdot |\,\vec{n}\,|}{|\,\vec{n}\,|} = \frac{|\,\vec{s}\vec{n}\,|}{|\,\vec{n}\,|}.$$

Поскольку система координат прямоугольная декартова, $|\,\vec{n}\,| = \sqrt{A^2 + B^2}$. Учитывая, что $M_0 \in \ell$, получаем, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Следовательно,

$$\vec{s}\vec{n} = A(x' - x_0) + B(y' - y_0) = Ax' + By' - (Ax_0 + By_0) = Ax' + By' + C.$$

Таким образом, формула для вычисления расстояния от точки M с координатами (x', y') до прямой ℓ, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $Ax + By + C = 0$, имеет следующий вид:

$$d(M, \ell) = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{15}$$

Формула (15) позволяет вывести формулу расстояния между параллельными прямыми. Предположим, что прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, параллельны. В силу теоремы 6.2 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Если $A_2 \neq 0$, умножим уравнение $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ на $\frac{A_1}{A_2}$. Если же $A_2 = 0$, то $B_2 \neq 0$, и потому $A_1 = 0$ (иначе $A_2B_1 = 0 \neq A_1B_2$, т. е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$). В этом случае умножим уравнение $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ на $\frac{B_1}{B_2}$. В обоих случаях мы получим, что уравнение прямой ℓ_2 можно записать в виде $A_1x + B_1y + C_2' = 0$ для некоторого C_2'. Поэтому можно считать, что

$$A_1 = A_2 \ \text{ и } \ B_1 = B_2. \tag{16}$$

Обозначим расстояние между ℓ_1 и ℓ_2 через $d(\ell_1, \ell_2)$. Ясно, что $d(\ell_1, \ell_2)$ равно расстоянию от произвольной точки, лежащей на ℓ_1, до ℓ_2. Пусть точка $M(x', y')$ лежит на ℓ_1. Учитывая формулу (15) и тот факт, что $A_1x' + B_1y' + C_1 = 0$, имеем

$$d(\ell_1, \ell_2) = d(M, \ell_2) = \frac{|A_1x' + B_1y' + C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} =$$
$$= \frac{|(A_1x' + B_1y' + C_1) + (C_2 - C_1)|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Таким образом,

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \tag{17}$$

Подчеркнем, что эту формулу можно применять только при условии, что выполнены равенства (16).