§ 5. Система координат. Координаты точки

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

5.1. Понятие системы координат

В школьном курсе математики сначала вводятся координаты точки, а затем с их помощью определяются координаты вектора. В систематическом курсе математики порядок появления этих понятий обратный — координаты вектора у нас уже появились в § 1, а теперь на их основе будут определены координаты точки. Но сначала надо сказать, что мы будем понимать под словами «система координат».

Определения

Аффинной системой координат или просто *системой координат в пространстве* [*на плоскости*] называется совокупность базиса пространства [соответственно базиса плоскости] и точки [принадлежащей этой плоскости]. Точка, входящая в систему координат, называется *началом системы координат*. Систему координат, состоящую из базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и начала координат O, будем обозначать через $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$; в случае плоскости используется обозначение $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

Наряду с аффинной, существуют и другие системы координат (например, полярная на плоскости или сферическая в пространстве), но в нашем курсе они возникать не будут.

Определения

Прямые, проходящие через точку O параллельно одному из базисных векторов, называются *осями координат*. Прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_1$ [соответственно $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$], будем называть *осью абсцисс* [соответственно *осью ординат*, *осью аппликат*]. Плоскости, проходящие через точку O и две из трех осей координат, называются *координатными плоскостями*.

Координаты точки

Определения

Зафиксируем в пространстве некоторую систему координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называются координаты ее радиуса-вектора в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тот факт, что точка M в некоторой системе координат имеет координаты (a_1, a_2, a_3), будем обозначать так: $M(a_1, a_2, a_3)$. Координаты точки на плоскости определяются аналогично координатам точки в пространстве.

Пусть точки A и B имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а координаты точек A и B совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно, получаем, что

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3). \tag{1}$$

Иными словами,

- *чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Определение

Система координат в пространстве $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правый ортонормированный. Система координат на плоскости $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — ортонормированный.

- В дальнейшем прямоугольная декартова система координат будет играть ту же роль, которую в § 2–4 играл ортонормированный базис, — именно в прямоугольной декартовой системе координат многие формулы и уравнения будут принимать наиболее простой и удобный для применения вид.

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox, Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy, Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

Расстояние между точками

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая формулу (1) из данного параграфа и формулу (5) из § 2, получаем, что расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \qquad (2)$$

Деление отрезка в данном отношении: определение и примеры

5.2. Деление отрезка в данном отношении

Определение

Предположим, что даны различные точки A и B и число t. Будем говорить, что *точка* C *делит отрезок* AB *в отношении* t, если

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}. \tag{3}$$

Например, если C — середина отрезка AB, то она делит его в отношении 1 (так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$), точка A делит его в отношении 0 (так как $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$), а точка B не делит его ни в каком отношении (так как $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ и не существует такого числа t, что $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{BB}$). На рис. 1 точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\frac{1}{2}$, а точка C_2 — в отношении -4.

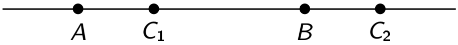

Рис. 1. Деление отрезка в данном отношении

- Как видно из последнего примера, точка, делящая отрезок в некотором отношении, не обязана принадлежать этому отрезку.

Деление отрезка в данном отношении: результат

Предложение 5.1

Пусть $A(a_1, a_2, a_3)$ *и* $B(b_1, b_2, b_3)$ *— две различные точки.*

1) *Точки, делящей отрезок* AB *в отношении* -1, *не существует.*
2) *Если* t *— произвольное действительное число, отличное от* -1, *то точка* C, *делящая отрезок* AB *в отношении* t, *существует и единственна, а ее координаты* (c_1, c_2, c_3) *могут быть найдены по формулам*

$$\begin{cases} c_1 = \frac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \frac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \frac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases} \tag{4}$$

3) *Точка* C *делит отрезок* AB *в некотором отношении тогда и только тогда, когда она принадлежит прямой* AB *и отлична от точки* B.

Формулы (4) называются *формулами деления отрезка в отношении* t.

Доказательство. 1) Предположим, что точка C делит отрезок AB в отношении -1, т. е. $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, что невозможно, так как точки A и B различны.

2) *Существование.* Пусть $t \neq -1$. Рассмотрим точку $C(c_1, c_2, c_3)$, координаты которой задаются равенствами (4). Тогда будут выполняться равенства

$$c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1),\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2) \text{ и } c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3).$$

Но эти равенства есть не что иное, как равенство (3), расписанное в координатах. Следовательно, точка C делит отрезок AB в отношении t.

Единственность. Предположим, что точка $D(d_1, d_2, d_3)$ делит отрезок AB в отношении t. Тогда $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{DB}$. Расписывая это равенство в координатах, получаем

$$d_1 - a_1 = t(b_1 - d_1),\ d_2 - a_2 = t(b_2 - d_2) \text{ и } d_3 - a_3 = t(b_3 - d_3),$$

откуда

$$d_1 = \frac{a_1 + tb_1}{1 + t} = c_1,\ d_2 = \frac{a_2 + tb_2}{1 + t} = c_2 \text{ и } d_3 = \frac{a_3 + tb_3}{1 + t} = c_3.$$

Следовательно, $D = C$. Это означает, что точка, делящая отрезок AB в отношении t, единственна.

3) Из равенства (3) вытекает, что направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Это означает, что точка C должна лежать на прямой AB. Как отмечалось выше, она не может совпадать с точкой B. Пусть теперь C — произвольная точка прямой AB, отличная от B. Тогда векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны и $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$. В силу критерия коллинеарности векторов существует такое число t, что выполнено равенство (3). □

Следующее наблюдение очевидно.

- *Пусть точка C делит отрезок AB в отношении t. Если C принадлежит отрезку AB и отлична от B, то $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{CB}$, и потому $t \geqslant 0$; в противном случае $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, и потому $t < 0$.*

Координаты середины отрезка

Отметим один важный частный случай. Предположим, что C — середина отрезка AB. Как уже отмечалось выше, это означает, что она делит этот отрезок в отношении 1. В силу (4) получаем, что точка C имеет координаты

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right).$$

Иными словами,

- *координаты середины отрезка есть полусумма координат его начала и конца.*

5.3. Замена системы координат

В оставшейся части параграфа рассматривается следующая задача: пусть в пространстве заданы две системы координат и известны координаты некоторой точки в одной из них. Требуется найти координаты той же точки в другой системе координат. Ту систему координат, в которой координаты точки известны, будем называть *старой*, а ту, в которой их надо найти, — *новой*. Ясно, что для того, чтобы решить задачу, надо знать, как связаны между собой старая и новая системы координат. Поэтому будем считать известными координаты начала новой системы координат в старой системе и координаты каждого из векторов, образующих базис новой системы координат, в базисе старой системы.

Пусть $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — старая, а $(P; \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — новая системы координат, (p_1, p_2, p_3) — координаты точки P в старой системе координат, а (t_{11}, t_{21}, t_{31}), (t_{12}, t_{22}, t_{32}) и (t_{13}, t_{23}, t_{33}) — координаты векторов $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ соответственно. Пусть, наконец, (x_1, x_2, x_3) — координаты точки M в старой системе координат. Требуется найти ее координаты в новой системе. Обозначим их через (x'_1, x'_2, x'_3).

Замена системы координат: матрица перехода от одного базиса к другому

Определение

Матрица
$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{pmatrix}$$
назовается *матрицей перехода от старого базиса к новому*.

Иными словами,

- матрица перехода от старого базиса $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ к новому базису $(\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3)$ — это матрица, в которой по столбцам стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе.

Замечание 5.1

Если T — матрица перехода от старого базиса к новому, то $|T|\neq 0$.

Доказательство. Обозначим через T' матрицу, транспонированную к T. В матрице T' по строкам записаны координаты векторов $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ в старом базисе. Эти векторы некомпланарны, так как они образуют базис. В силу замечания 4.2 $|T'|\neq 0$. Остается учесть, что $|T|=|T'|$ в силу свойства 6) определителей третьего порядка (см. § 0).

Вычислим двумя способами вектор $\overrightarrow{OM}$. С одной стороны, $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$. С другой,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = (p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3) + (x_1'\vec{c}_1 + x_2'\vec{c}_2 + x_3'\vec{c}_3) = \\ &= p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3 + x_1'(t_{11}\vec{b}_1 + t_{21}\vec{b}_2 + t_{31}\vec{b}_3) + \\ &+ x_2'(t_{12}\vec{b}_1 + t_{22}\vec{b}_2 + t_{32}\vec{b}_3) + x_3'(t_{13}\vec{b}_1 + t_{23}\vec{b}_2 + t_{33}\vec{b}_3) = \\ &= (p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3')\vec{b}_1 + (p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3')\vec{b}_2 + \\ &+ (p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3')\vec{b}_3.\end{aligned}$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, с одной стороны, равны (x_1, x_2, x_3), а с другой, —

$$(p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3', p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3', p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3').$$

В силу единственности разложения вектора по базису в пространстве (см. теорему 1.2) имеют место равенства

$$\begin{cases} x_1 &= p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3', \\ x_2 &= p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3', \\ x_3 &= p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3'. \end{cases} \tag{5}$$

Эти равенства называются *формулами перехода от старой системы координат к новой* или *формулами замены системы координат*.

Аналогичные рассуждения показывают, что на плоскости формулы замены системы координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 &= p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2', \\ x_2 &= p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2'. \end{cases} \tag{6}$$

Формулы (5) позволяют найти координаты точки в старой системе координат (x_1, x_2 и x_3), если известны их координаты в новой системе (x'_1, x'_2 и x'_3). Между тем исходная постановка задачи была прямо противоположной: по координатам точки в старой системе координат найти ее координаты в новой системе. Тем не менее, можно считать, что формулы (5) дают решение исходной задачи.

Для того, чтобы убедиться в этом, посмотрим на формулы (5) как на систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x'_1, x'_2, x'_3:

$$\begin{cases} t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + t_{13}x'_3 = x_1 - p_1, \\ t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + t_{23}x'_3 = x_2 - p_2, \\ t_{31}x'_1 + t_{32}x'_2 + t_{33}x'_3 = x_3 - p_3. \end{cases} \tag{7}$$

(Эта точка зрения естественна, поскольку, в соответствии с исходной постановкой задачи, величины x'_1, x'_2 и x'_3 неизвестны, а все остальные величины, входящие в систему (7), а именно, x_i, p_i, и t_{ij} для всех $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, — известны.)

Замена системы координат: решение исходной задачи (2)

Матрицей системы (7) является матрица перехода от старого базиса к новому. В силу замечания 5.1 определитель этой матрицы не равен нулю. Согласно теореме Крамера для систем третьего порядка, отсюда вытекает, что система (7) имеет единственное решение. Найдя это решение, мы найдем выражение координат точки M в новой системе координат через ее координаты в старой системе. Мы не будем приводить соответствующие формулы в общем виде, так как они выглядят довольно громоздко.

Формулы поворота системы координат на плоскости (1)

Рассмотрим важный частный случай формул (6). Предположим, что старая система координат на плоскости — прямоугольная декартова, а новая система координат получается из старой поворотом плоскости вокруг начала координат старой системы на некоторый угол α (см. рис. 2).

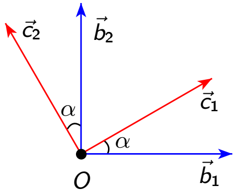

Рис. 2. Поворот системы координат

В частности, начало новой системы координат совпадает с началом старой системы, и потому $p_1 = p_2 = 0$. Нетрудно понять, что матрица перехода от старого базиса к новому имеет в данном случае вид

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Она называется *матрицей поворота системы координат на угол* α. Следовательно, формулы замены системы координат принимают вид

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha, \\ x_2 &= x_1' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Эти формулы называются *формулами поворота системы координат на угол* α.