# § 4. Смешанное произведение векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## 4.1. Определение смешанного произведения

**Определение**

*Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c}$.

Первым утверждением, показывающим полезность этого понятия, является следующий факт.

**Предложение 4.1 (критерий компланарности векторов)**

*Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Предположим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c} = 0$.

*Достаточность.* Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$. Но вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости $\sigma$, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку $\vec{c}$ ортогонален этому вектору, то он лежит в $\sigma$. А это означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. □

Следующее утверждение указывает еще одно важное для приложений свойство смешанного произведения.

**Предложение 4.2 (геометрический смысл смешанного произведения)**

*Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.*

Доказательство этого утверждения дано на следующем слайде.

**Доказательство**. Предположим сначала, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 1 на следующем слайде. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки $O$. Пусть точка $C$ такова, что $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, а $D$ — проекция точки $C$ на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которую мы обозначим через $\pi$. Угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью $\pi$ обозначим через $\alpha$, а угол между векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ — через $\beta$. Учитывая, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, и потому $\sin\alpha = \cos\beta$, и используя геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\alpha =$$
$$= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\beta = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Предположим теперь, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — левая. Тогда тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Но эти две тройки определяют один и тот же параллелепипед. В силу доказанного выше объем этого параллелепипеда равен $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$. Пользуясь свойствами векторного произведения, получаем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \big(-(\vec{b} \times \vec{a})\big)\vec{c} = -\big((\vec{b} \times \vec{a})\vec{c}\big) = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -V,$$

и потому $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |-V| = V$. $\square$

# Геометрический смысл смешанного произведения (рисунок)

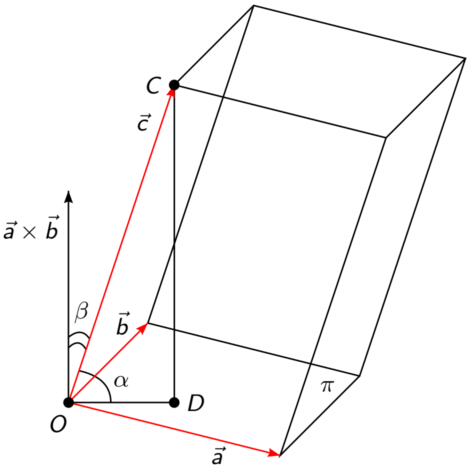


Рис. 1. Вычисление объема параллелепипеда

Из доказательства геометрического смысла смешанного произведения вытекает следующий факт, который объясняет, почему правая тройка векторов называется положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной.

**Замечание 4.1**

*Тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ является правой тогда и только тогда, когда их смешанное произведение больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.* □

Перечислим теперь алгебраические свойства смешанного произведения векторов.

## Свойства смешанного произведения

*Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные векторы, а $t$ — произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$;
3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*);
5) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

**Доказательство.** 1) Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу геометрического смысла смешанного произведения, смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$. Равенство $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ проверено в процессе доказательства геометрического смысла смешанного произведения. Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично одному из этих двух.

2) Используя свойство 1) смешанного произведения и свойство 3) скалярного произведения (см. § 2), имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c})(t\vec{a}) = t \cdot ((\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}) = t \cdot \vec{b}\vec{c}\vec{a} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Аналогично доказывается равенство $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Наконец,

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{c}) = t \cdot ((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Свойство 2) доказано.

Свойства 3)–5) доказываются аналогично друг другу, мы докажем только первое из них. Используя свойство 1) смешанного произведения и свойство 2) скалярного произведения (см. § 2), имеем

$$\begin{gathered}(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d}=\vec{c}\vec{d}(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{c}\times\vec{d})(\vec{a}+\vec{b})=\\=(\vec{c}\times\vec{d})\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{d})\vec{b}=\vec{c}\vec{d}\vec{a}+\vec{c}\vec{d}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}.\end{gathered}$$

Свойство 3) доказано. $\square$

В § 3 были сформулированы, но не доказаны свойства 2) и 4) векторного произведения. Напомним, в чем они состоят. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, а $t$ — произвольное число. Свойство 2) утверждает, что

$$(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b}),$$

а свойство 3) — что

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

В силу ослабленного закона сокращения для скалярного произведения, для их доказательства достаточно установить, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняются равенства $((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}$ и $((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})\vec{x}$. Имеем

$$((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t\vec{a})\vec{b}\vec{x} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = t \cdot \big((\vec{a} \times \vec{b})\vec{x}\big) = \big(t \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\big)\vec{x};$$

$$((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{x} = \vec{a}\vec{c}\vec{x} + \vec{b}\vec{c}\vec{x} =$$

$$=(\vec{a} \times \vec{c})\vec{x} + (\vec{b} \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})\vec{x}.$$

Оба свойства доказаны. $\square$

## 4.2. Вычисление смешанного произведения в координатах

Пусть векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ образуют базис пространства, а $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3)$ и $(z_1, z_2, z_3)$ — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что если два из трех векторов равны, то смешанное произведение этих трех векторов равно нулю. Используя этот факт, получаем равенства

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) =$$
$$= (x_1y_2z_3)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 +$$
$$+ (x_2y_3z_1)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1.$$

Используя свойство 1) смешанного произведения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как определитель матрицы третьего порядка, в которой по строкам записаны координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Следовательно,

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3. \quad (1)$$

В отличие от ситуации со скалярным и векторным произведением, равенство (1) дает достаточно простую и легко запоминаемую формулу, связывающую смешанное произведение векторов с их координатами в произвольном базисе. Но и в этом случае мы не можем вычислить смешанное произведение, не зная смешанного произведения базисных векторов. Справедливо, однако, следующее полезное утверждение.

**Замечание 4.2**

*Пусть $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3)$ и $(z_1, z_2, z_3)$ — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором (произвольном) базисе. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

**Доказательство**. Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — базис, о котором идет речь в формулировке замечания. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Учитывая формулу (1), получаем, что $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2). Остается еще раз сослаться на критерий компланарности векторов.

# Вычисление смешанного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ является правым ортонормированным, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$ (см. формулы (1) в § 3), и потому

$$\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\vec{b}_3 = \vec{b}_3\vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула (1) принимает совсем простой вид:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Пусть $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3)$ и $(z_1, z_2, z_3)$ — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.
Используя смешанное произведение, можно:

1. вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$: в силу (3) и геометрического смысла смешанного произведения

$$V = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

(в этой формуле символом mod обозначен модуль определителя);
2. определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: в силу (3) и замечания 4.1 тройка векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ является:
   - правой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0,$$

   - левой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0.$$