§ 3. Векторное произведение векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

3.1. Определение и свойства векторного произведения

Для того, чтобы дать определение векторного произведения векторов, необходимо ввести понятие ориентации тройки векторов. Это понятие пригодится нам и в дальнейшем.

Определение

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ называется *правой*, если из конца вектора $\vec{w}$ поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и *левой* — в противном случае. Правую тройку векторов называют также *положительно ориентированной*, а левую — *отрицательно ориентированной*.

- Термины «правая» и «левая» тройки векторов имеют «антропологическое» происхождение: если смотреть с конца большого пальца на поворот от среднего пальца к указательному, то на правой руке он будет происходить против часовой стрелки, а на левой — по ней (это называют *правилом правой руки*).

Причина, по которой правая тройка называется также положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной, станет ясной в следующем параграфе.

Ориентация тройки векторов (2)

На рис. 1 тройка векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ слева является правой, а справа — левой (имеется в виду, что векторы $\vec{v}$ и $\vec{w}$ расположены в горизонтальной плоскости, а вектор $\vec{w}$ направлен вверх).

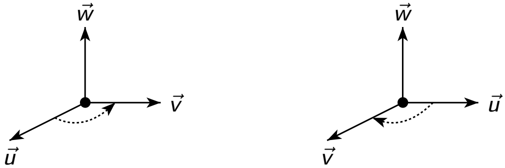

Рис. 1. Правая (слева) и левая (справа) тройки векторов

Несложно убедиться в том, что

- *перестановка двух соседних векторов в тройке меняет ее ориентацию на противоположную, а циклическая перестановка не меняет*[1].

[1] *Циклическая перестановка* — это переход от тройки $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ к тройке $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ или к тройке $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$.

Определение векторного произведения векторов

Определение

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

1) $|\vec{c}\,| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}\,| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\,)$,
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3) тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ — правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулевому вектору. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}\,]$.

Заметим, что п. 2) из определения векторного произведения определяет прямую, вдоль которой направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (это прямая, перпендикулярная к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), но не указывает, в какую сторону вдоль этой прямой направлен этот вектор. Для того, чтобы однозначно указать направление вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, и нужен п. 3) определения.

Пример: векторные произведения векторов правого ортонормированного базиса

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — *правый ортонормированный базис пространства*, т. е. ортонормированный базис, являющийся правой тройкой векторов (см. рис. 2). Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1. \tag{1}$$

Первое равенство вытекает из того, что

$$|\vec{e}_3| = 1 = 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}),$$

$\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$ и тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правая. Два других равенства проверяются аналогично.

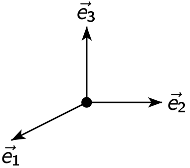

Рис. 2. Правый ортонормированный базис

В § 1 был приведен критерий коллинеарности векторов. С помощью векторного произведения можно указать еще одно утверждение такого рода.

Предложение 3.1 (второй критерий коллинеарности векторов)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доказательство. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ по определению векторного произведения. Обратно, если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, т. е. либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$, либо $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Ясно, что в каждом из этих трех случаев $\vec{a} \parallel \vec{b}$. $\square$

Следующее утверждение указывает свойство векторного произведения, важное в различных приложениях (как в математике, так и за ее пределами, например, в физике).

Предложение 3.2 (геометрический смысл векторного произведения)

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то длина векторного произведения этих векторов равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, построенный на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (при этом $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$), S — площадь этого параллелограмма, h — длина его высоты, опущенной из точки D, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 3). Тогда $S = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$. $\square$

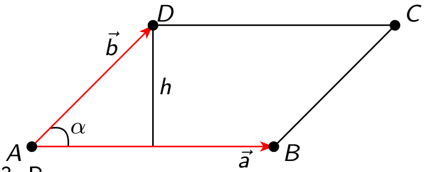

Рис. 3. Вычисление площади параллелограмма

Укажем теперь алгебраические свойства векторного произведения.

Свойства векторного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (векторное произведение *антикоммутативно*);
2) $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (векторное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (векторное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*).

Доказательство. 1) Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то, в силу второго критерия коллинеарности, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$. Из последнего равенства вытекает, что $-\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Предположим теперь, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Убедимся сначала, что длины векторов, указанных в левой и правой частях доказываемого равенства, равны между собой. В самом деле, $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, и потому

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = |\vec{b} \times \vec{a}| = |-\vec{b} \times \vec{a}|.$$

Как левая, так и правая части доказываемого равенства ортогональны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ является правой (по определению векторного произведения), для завершения доказательства равенстваосталось убедиться в том, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{b} \times \vec{a})$ также является правой. Заметим, что по определению векторного произведения тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$ — правая. Если у последнего вектора сменить знак, мы получим левую тройку $(\vec{b}, \vec{a}, -\vec{b} \times \vec{a})$. Поскольку перестановка соседних векторов меняет ориентацию тройки, мы получаем, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{b} \times \vec{a})$ — правая.

Свойства 2) и 3) будут доказаны в следующем параграфе. Свойство 4) следует из свойств 1) и 3). В самом деле,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = -(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}) = -\vec{b}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Замечание 3.1

Множество всех векторов с операциями сложения и векторного произведения является кольцом. Это кольцо не является ни ассоциативным, ни коммутативным и не содержит единицы.

Доказательство. Обозначим множество всех векторов через V. Первое утверждение замечания 3.1 вытекает из замечания 1.2 и свойств 3) и 4) векторного произведения, а некоммутативность кольца V — из свойства 1) векторного произведения. Докажем его неассоциативность. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правый ортонормированный базис. Используя равенства (1), имеем

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{0} \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \text{ но } \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2.$$

Таким образом, $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 \neq \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$. Докажем, наконец, отсутствие единицы в кольце V. Предположим, что $\vec{e}$ — нейтральный элемент этого кольца по умножению, т. е. что $\vec{x} \times \vec{e} = \vec{x}$ для любого вектора $\vec{x}$. Тогда $\vec{x} \perp \vec{x}$, откуда $\vec{x}^2 = 0$, и значит, $\vec{x} = \vec{0}$. Но это противоречит тому, что $\vec{x}$ — любой вектор. $\square$

3.2. Вычисление векторного произведения в координатах

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — некоторый базис пространства, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Применяя свойства 2)–4) векторного произведения, имеем

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)\times(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = \\ = x_1y_1(\vec{e}_1\times\vec{e}_1) + x_1y_2(\vec{e}_1\times\vec{e}_2) + x_1y_3(\vec{e}_1\times\vec{e}_3) + \\ + x_2y_1(\vec{e}_2\times\vec{e}_1) + x_2y_2(\vec{e}_2\times\vec{e}_2) + x_2y_3(\vec{e}_2\times\vec{e}_3) + \\ + x_3y_1(\vec{e}_3\times\vec{e}_1) + x_3y_2(\vec{e}_3\times\vec{e}_2) + x_3y_3(\vec{e}_3\times\vec{e}_3).\end{aligned}$$

Используя второй критерий коллинеарности и антикоммутативность векторного произведения, можно переписать это равенство в виде

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1)\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2) + (x_1y_3 - x_3y_1)\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_3) + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3).\end{aligned} \qquad (2)$$

Как и в случае со скалярным произведением векторов, эта формула не позволяет вычислить векторное произведение без дополнительной информации о векторных произведениях базисных векторов.

Вычисление векторного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Предположим теперь, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правый ортонормированный базис. Используя равенства (1), получаем, что формула (2) приобретает вид

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{e}_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)\vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{e}_3. \tag{3}$$

Правую часть этого равенства удобно представлять как результат разложения по первой строке символического определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

С учетом этой договоренности, окончательно имеем

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Пусть (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе. Используя векторное произведение, можно:

1. вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$: из геометрического смысла векторного произведения и формулы (3) вытекает, что
$$S = \sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}; \qquad (5)$$
2. вычислить синус угла между ненулевыми векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$: из определения векторного произведения и формулы (3) вытекает, что
$$\sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Наряду с формулой (5), можно указать еще одну формулу для вычисления площади параллелограмма. Предположим, что мы знаем только координаты векторов, на которых построен параллелограмм, в базисе той плоскости, в которой эти векторы лежат. А именно, пусть параллелограмм построен на неколлинеарных векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ — ортонормированный базис плоскости π, в которой лежат $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Обозначим координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ через (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно.

Пусть $\vec{e}_3$ — вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости π и направленный так, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правая тройка векторов. Ясно, что эта тройка образует правый ортонормированный базис пространства, в котором векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют координаты $(x_1, x_2, 0)$ и $(y_1, y_2, 0)$ соответственно. В силу (4) имеем

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Учитывая геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$S = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

(символом mod мы обозначили модуль определителя, поскольку стандартное обозначение модуля числа было бы здесь неудобочитаемым). Отметим, что формулу (6) можно переписать в виде $S = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$. Легко видеть, что правая часть последнего равенства совпадает с правой частью равенства (5) при $x_3 = y_3 = 0$.

3.3. Двойное векторное произведение

Определение

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется векторное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Оно обозначается через $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Таким образом, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Предложение 3.3

Для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполнено равенство

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,). \tag{7}$$

В правой части равенства (7) написано произведение вектора $\vec{b}$ на скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и произведение вектора $\vec{c}$ на скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обычно при записи произведения вектора на число вектор пишут справа, а число слева, но в этой формуле число и вектор принято писать в противоположном порядке. Такая запись объясняет название формулы (7): она называется *формулой бац минус цаб*.

Доказательство. Обозначим через $\vec{e}_1$ вектор единичной длины, коллинеарный вектору $\vec{c}$,через $\vec{e}_2$ — вектор единичной длины, ортогональный вектору $\vec{e}_1$ и расположенный в одной плоскости с векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а через $\vec{e}_3$ — вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и направленный так, что тройка векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ является правым ортонормированным базисом. Ясно, что $\vec{c} = c_1\vec{e}_1$ для некоторого $c_1 \in \mathbb{R}$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ обозначим через (a_1, a_2, a_3). Ясно, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют в этом базисе координаты $(b_1, b_2, 0)$ и $(c_1, 0, 0)$ соответственно.

Найдем координаты вектора $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Используя формулу (4), имеем

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -b_2 c_1)$$

$$\text{и} \quad \vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -b_2 c_1 \end{vmatrix} = (-a_2 b_2 c_1, a_1 b_2 c_1, 0).$$

С другой стороны, $\vec{a}\vec{c} = a_1 c_1$ и $\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, откуда

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) &= a_1 c_1 \cdot (b_1, b_2, 0) - (a_1 b_1 + a_2 b_2) \cdot (c_1, 0, 0) = \\ &= (a_1 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_1, a_1 b_2 c_1, 0) = \\ &= (-a_2 b_2 c_1, a_1 b_2 c_1, 0). \end{aligned}$$

Сравнивая найденные координаты векторов $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ и $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, получаем равенство (7).

Предложение 3.4

Для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполнено равенство

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}.$$

Это равенство называется *тождеством Якоби*.

Доказательство. Используя формулу бац минус цаб и коммутативность скалярного произведения, имеем

$$\begin{aligned}
&[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = \\
&= \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,) + \vec{c}\,(\vec{b}\,\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}\,) + \vec{a}(\vec{c}\,\vec{b}\,) - \vec{b}(\vec{c}\,\vec{a}) = \\
&= \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,) + \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}\,) + \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}\,) = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Предложение доказано. □