Часть I. Векторная алгебра

§ 1. Линейные операции над векторами

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

1.1. Направленные отрезки и векторы

Содержание этого параграфа в значительной степени повторяет соответствующие темы школьного курса математики, но имеются и некоторые отличия. Основное из них состоит в способе введения понятия вектора.

Определения

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. Если $A = B$, то отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* к $\overrightarrow{AB}$.

- В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позже.

Коллинеарные направленные отрезки

Определение

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Нулевой направленный отрезок по определению коллинеарен любому другому. Тот факт, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, обозначается через $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

- Термин «коллинеарность» происходит от английских слов «common linear» т. е. «общая линия».

Сонаправленные и антинаправленные отрезки

Определения

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* (или *имеющими одно и то же направление*), если выполнено одно из следующих двух условий:

(i) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых, и точки B и D расположены по одну сторону от прямой AC;

(ii) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной и той же прямой ℓ, и отрезок $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с отрезком $\overrightarrow{C'D'}$, который лежит на прямой ℓ', параллельной ℓ, и получен параллельным сдвигом отрезка $\overrightarrow{CD}$.

Ненулевые направленные отрезки называются *антинаправленными* (или *имеющими противоположные направления*), если они коллинеарны и не сонаправлены. Нулевой направленный отрезок по определению сонаправлен и антинаправлен любому другому. Антинаправленные отрезки называют также *противонаправленными*. Тот факт, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены [антинаправлены], обозначается через $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ [соответственно, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$].

Определение сонаправленных отрезков иллюстрирует рис. 1, на котором слева изображен случай (i), а справа — случай (ii).

Сонаправленные отрезки (рисунок)

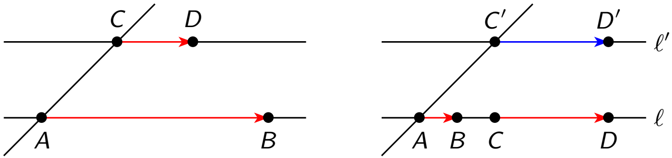

Рис. 1. Сонаправленные отрезки

Определения

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление. Направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется *изображением вектора*.

Все изображения данного вектора имеют одну и ту же длину. Это делает корректным следующее

Определение

Длиной (или *модулем*) *вектора* называется длина любого его изображения.

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т. е. состоят из одних и тех же направленных отрезков. Допуская вольность речи, говорят, что *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление*.

- для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке A.

Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора* $\vec{a}$ *от точки* A.

Понятие вектора (2)

Используя понятия отношения эквивалентности и фактор-множества, можно дать несколько более формализованное определение вектора. Обозначим через S множество всех направленных отрезков. Введем на множестве S бинарное отношение α следущим образом: $\overrightarrow{AB}\,\alpha\,\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Легко проверяется, что отношение α рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности. Это позволяет рассмотреть фактор-множество S/α. Напомним, что его элементами являются множества направленных отрезков, попадающих в один α-класс с некоторым фиксированным направленным отрезком. Очевидно, что приведенное выше определение вектора равносильно следующему.

Определение

Вектором называется произвольный элемент фактор-множества S/α, где S — множество всех направленных отрезков, а α — введенное выше бинарное отношение на S.

Определения

Два вектора называются *коллинеарными* (*сонаправленными*, *антинаправленными*), если их изображения коллинеарны (сонаправленны, антинаправленны). Антинаправленные векторы называют также *противонаправленными*. *Длиной* вектора называется длина его изображения.

Для обозначения понятий, сформулированных в определении, применяются те же символы, что и для обозначения соответствующих понятий в случае направленных отрезков.

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является изображением вектора $\vec{a}$, то вектор, изображением которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. Из данных выше определений вытекает, что

- нулевой вектор коллинеарен, сонаправлен и антинаправлен с любым другим вектором.

1.2. Сумма векторов

Определение

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку O, отложим от нее вектор $\vec{a}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через A. От точки A отложим вектор $\vec{b}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через B. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ изображает вектор, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 2). Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}+\vec{b}$.

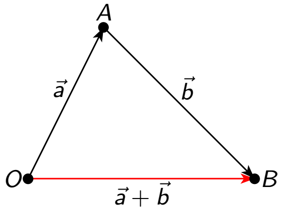

Рис. 2. Сумма векторов

Замечание 1.1

Сумма векторов не зависит от выбора начальной точки O. □

Более точно, если мы в качестве O возьмем другую точку P и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, который сонаправлен отрезку $\overrightarrow{OB}$ и имеет с ним одинаковую длину (см. рис. 3). Следовательно, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{PR}$ — изображения одного и того же вектора.

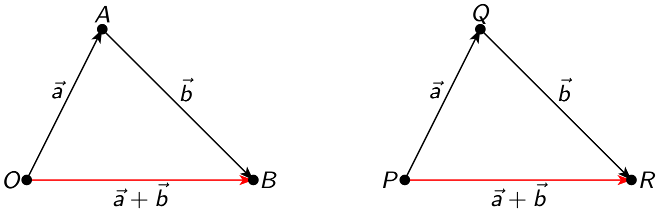

Рис. 3. Корректность определения суммы векторов

Сумму векторов можно определить и по-другому. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной и той же точки O. Концы полученных направленных отрезков обозначим через A и B соответственно, а четвертую вершину параллелограмма со сторонами OA и OB — через M. Тогда вектор, соответствующий направленному отрезку $\overrightarrow{OM}$, будет равен $\vec{a}+\vec{b}$ (см. рис. 4, на котором слева вектор $\vec{a}+\vec{b}$ построен по определению, а справа — описанным только что способом). Заметим, однако, что этот способ построения суммы векторов применим только к неколлинеарным векторам.

Рис. 4. Два способа определения суммы векторов

Следующие свойства суммы векторов известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства суммы векторов

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, то:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (сложение векторов *коммутативно*);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сложение векторов *ассоциативно*);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

$\square$

Эти свойства показывают, что справедливо следующее утверждение.

Замечание 1.2

Множество всех векторов с операцией сложения является абелевой группой. $\square$

Нейтральным элементом этой группы является вектор $\vec{0}$, а элементом, обратным (или, что то же самое, симметричным) к вектору $\vec{a}$, — вектор $-\vec{a}$.

1.3. Произведение вектора на число

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* t называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

1) $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$;
2) если $t \geqslant 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$;
3) если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Следующие свойства произведения вектора на число известны из школьного курса, поэтому мы их не доказываем.

Свойства произведения вектора на число

Если $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *— произвольные векторы, а* t *и* s *— произвольные числа, то:*

1) $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
2) $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);
3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$;
4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. $\square$

Определение

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор. *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

При решении некоторых задач возникает необходимость найти орт данного вектора. В следующем замечании указано, как это можно сделать.

Замечание 1.3

Если — ненулевой вектор, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.

Доказательство. Поскольку $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, из определения произведения вектора на число вытекает, что векторы $\vec{a}$ и $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ сонаправлены. Вновь используя определение произведения вектора на число, имеем

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Следовательно, вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ действительно является ортом вектора $\vec{a}$. $\square$

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Предложение 1.1 (критерий коллинеарности векторов)

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.

Доказательство. *Достаточность* непосредственно вытекает из определения произведения вектора на число.

Необходимость. По условию $|\vec{b}| \neq 0$. Поскольку $\vec{a} \parallel \vec{b}$, получаем, что либо $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, либо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Положим

$$t = \begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \upuparrows \vec{b}, \\ -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $t > 0$, и потому $t\vec{b} \upuparrows \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Таким образом, в любом случае векторы $\vec{a}$ и $t\vec{b}$ сонаправленны. Кроме того,

$$|t\vec{b}| = |t| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$. $\square$

1.4. Базис плоскости и пространства. Координаты вектора

Определение

Базисом плоскости называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b})$.

Поскольку нулевой вектор по определению коллинеарен любому другому, получаем простое, но принципиально важное

Замечание 1.4

Нулевой вектор не может входить в базис плоскости. □

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса на плоскости, является следующая

Теорема 1.1 (теорема о разложении вектора по базису на плоскости)

Пусть $(\vec{a}, \vec{b})$ *— базис некоторой плоскости, а* $\vec{x}$ *— вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1 *и* t_2 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующем слайде.

Определения

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b})$. Коэффициенты t_1, t_2 разложения (1) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ координаты t_1, t_2, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2)$.

Доказательство теоремы 1.1. *Существование.* Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B и M соответственно (см. рис. 5 на следующем слайде). Спроектируем точку M на прямую OA параллельно прямой OB и на прямую OB параллельно прямой OA. Обозначим полученные точки через A' и B' соответственно и положим $\vec{a}\,' = \overrightarrow{OA'}$ и $\vec{b}\,' = \overrightarrow{OB'}$. Ясно, что $\vec{a}\,' \parallel \vec{a}$ и $\vec{b}\,' \parallel \vec{b}$. Поскольку $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ (см. замечание 1.4), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{a}\,' = t_1\vec{a}$ и $\vec{b}\,' = t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Тогда $\vec{x} = \vec{a}\,' + \vec{b}\,' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$.

Единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b}$ для некоторых чисел s_1 и s_2. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (1), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b}$. Но тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по определению произведения вектора на число, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$. $\square$

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (рисунок)

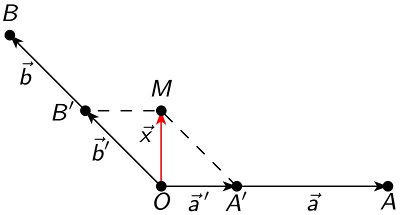

Рис. 5. Разложение вектора по базису
на плоскости

Определение

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости.

- Термин «компланарность» происходит от английских слов «common plane» т. е. «общая плоскость».

Определение

Базисом пространства называется произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ясно, что если один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — нулевой, то эти векторы компланарны. Следовательно, справедливо следующее замечание, аналогичное замечанию 1.4.

Замечание 1.5

Нулевой вектор не может входить в базис пространства. □

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса в пространстве, является следующая теорема, аналогичная теореме 1.1.

Теорема 1.2 (теорема о разложении вектора по базису в пространстве)

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *— базис пространства, а* $\vec{x}$ *— произвольный вектор. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1, t_2 *и* t_3 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующем слайде.

Определения

Равенство (2) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Коэффициенты t_1, t_2, t_3 разложения (2) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты t_1, t_2, t_3, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2, t_3)$.

Доказательство теоремы 1.2. *Существование.* Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B, C и M соответственно (см. рис. 6 на следующем слайде). Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны (в противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были бы компланарными и не образовывали бы базиса пространства), существует единственная плоскость π, проходящая через точки O, A и B. Спроектируем точку M на плоскость π параллельно прямой OC и на прямую OC параллельно плоскости π. Обозначим полученные точки через M' и C' соответственно и положим $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OM'}$ и $\vec{c}\,' = \overrightarrow{OC'}$. По теореме 1.1 $\vec{x}\,' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Далее, ясно, что $\vec{c}\,' \parallel \vec{c}$. Поскольку $\vec{c} \neq \vec{0}$ (см. замечание 1.5), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{c}\,' = t_3\vec{c}$ для некоторого числа t_3. Тогда $\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{c}\,' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$.

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису в пространстве (2)

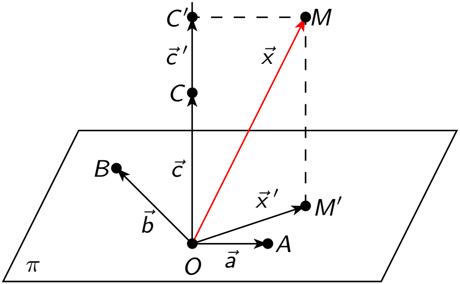

Рис. 6. Разложение вектора по базису в пространстве

Единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$ для некоторых чисел s_1, s_2 и s_3. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (2), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$. Но тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$. $\square$

Координаты суммы векторов и произведения вектора на число

Замечание 1.6

Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в одном и том же базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_3, y_3) соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\vec{x} + \vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты (tx_1, tx_2, tx_3). Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.

Доказательство. По определению координат вектора в пространстве имеют место равенства $\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$ и $\vec{y} = y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}) + (y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}) = \\ &= (x_1 + y_1)\vec{a} + (x_2 + y_2)\vec{b} + (x_3 + y_3)\vec{c} \\ \text{и} \quad t\vec{x} &= t(x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}) = (tx_1)\vec{a} + (tx_2)\vec{b} + (tx_3)\vec{c}. \end{aligned}$$

Остается сослаться на определение координат вектора в пространстве. В случае плоскости доказательство абсолютно аналогично. $\square$