# § 0. Определители второго и третьего порядков

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## 0.1. Понятие матрицы

Мы начнем с важного для дальнейшего понятия матрицы.

**Определения**

*Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Если матрица содержит $m$ строк и $n$ столбцов, то будем говорить, что она имеет *размер* $m \times n$. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. В этом случае вместо термина «матрица размера $n \times n$», как правило, употребляется термин *квадратная матрица порядка* $n$. Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами* матрицы. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и на одинаковых местах в них стоят одни и те же элементы.

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация, при этом первый индекс означает номер строки, а второй — номер столбца, в которых стоит данный элемент. Например, $a_{12}$ — элемент, стоящий в первой строке и втором столбце. Произвольная матрица размера $m \times n$ обозначается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко эта матрица записывается в виде $A = (a_{ij})$, а если важно указать ее размер — то в виде $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

**Определения**

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка $n$, то элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы $A$, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ — ее *побочную диагональ*.

## 0.2. Определители второго порядка

### Определение

*Определителем* квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

второго порядка (или просто *определителем второго порядка*) называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Иными словами,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали минус произведение элементов на побочной диагонали.*

Определители возникли в теории систем линейных уравнений. Покажем, как применяется понятие определителя второго порядка к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Такая система в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

### Определения

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы (1), называется *основной матрицей* этой системы. Определитель этой матрицы (т. е. определитель $\Delta$) называется *определителем системы* (1).

Заметим, что

- определитель $\Delta_i$ (при $i = 1, 2$) получается из определителя $\Delta$ заменой $i$-го столбца основной матрицы системы на столбец свободных членов.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 0.1 (теорема Крамера для систем второго порядка)**

*Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам* $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема 0.1 является частным случаем теоремы Крамера, которая относится к системам $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными при любом $n$. Доказательство теоремы Крамера в общем случае дается в курсе линейной алгебры. Здесь мы докажем ее только что сформулированный частный случай.

**Доказательство.** *Существование.* Докажем, что наша система имеет по крайней мере одно решение. Подставим $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ вместо $x_1$ и $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ вместо $x_2$ в первое уравнение системы. Получим

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11}(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + a_{12}(a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{\Delta} =$$
$$= \frac{a_{11} b_1 a_{22} - a_{11} b_2 a_{12} + a_{12} a_{11} b_2 - a_{12} a_{21} b_1}{\Delta} =$$
$$= \frac{b_1(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}{\Delta} = \frac{b_1 \cdot \Delta}{\Delta} = b_1.$$

# Теорема Крамера для систем второго порядка (2)

Итак, пара чисел $(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta})$ является решением первого уравнения системы (1). Аналогично проверяется, что она является решением второго уравнения этой системы. Мы доказали, что решение системы (1) существует. Осталось доказать его единственность.

*Единственность.* Пусть $(x_1^0, x_2^0)$ — решение системы (1), т. е. справедливы равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 = b_2. \end{cases} \tag{2}$$

Умножим первое из этих равенств на $a_{22}$, второе на $-a_{12}$, и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$a_{11}a_{22}x_1^0 + a_{12}a_{22}x_2^0 - a_{21}a_{12}x_1^0 - a_{22}a_{12}x_2^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

т. е. $\Delta \cdot x_1^0 = \Delta_1$. Поскольку $\Delta \neq 0$, имеем $x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$. Теперь умножим первое из равенств (2) на $a_{21}$, второе на $-a_{11}$ и сложим полученные равенства. После очевидных преобразований получим, что $\Delta \cdot x_2^0 = \Delta_2$, откуда $x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Мы взяли произвольное решение $(x_1^0, x_2^0)$ системы (1) и доказали, что оно совпадает с решением $(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta})$. Это означает, что решение единственно. Теорема доказана.

## 0.3. Определители третьего порядка

### Определение

*Определителем* квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка (или просто *определителем третьего порядка*) называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. На следующем слайде мы укажем правило, позволяющее ее запомнить. Чтобы его сформулировать, заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На рис. 1 на следующем слайде изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка. Элементы матрицы изображены точками. Линии в обоих определителях соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом слева соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а справа — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

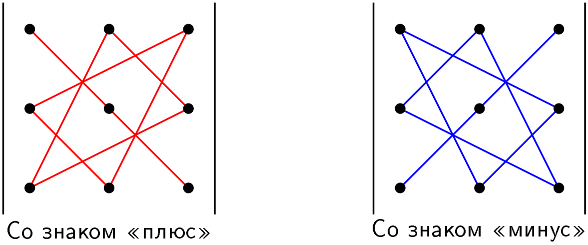


Рис. 1. Правило треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

**Правило треугольников**

*Со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.*

Определители третьего порядка можно применять для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными подобно тому, как определители второго порядка применяются для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

### Определения

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы (3), называется *основной матрицей* этой системы. Определитель этой матрицы (т. е. определитель $\Delta$) называется *определителем системы* (3).

Заметим, что

- определитель $\Delta_i$ (при $i = 1, 2, 3$) получается из определителя $\Delta$ заменой $i$-го столбца основной матрицы системы на столбец свободных членов.

Справедливо следующее утверждение, которое аналогично доказанной выше теореме 0.1.

### Теорема 0.2 (теорема Крамера для систем третьего порядка)

*Если $\Delta \neq 0$, то система (3) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.* $\square$

Мы не будем доказывать эту теорему, поскольку она, как и теорема 0.1, является частным случаем теоремы Крамера, которая доказывается в курсе линейной алгебры.

**Определение**

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка и $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Обозначим через $M_{ij}$ определитель квадратной матрицы второго порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы $A$ $i$-й строки и $j$-го столбца, и положим $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Число $A_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента $a_{ij}$.

Справедлив следующий факт, который сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению трех определителей второго порядка.

**Предложение 0.1 (разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу)**

*Определитель квадратной матрицы третьего порядка равен сумме произведений элементов произвольной ее строки [произвольного ее столбца] на их алгебраические дополнения.*

**Доказательство.** Докажем, что определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения (для двух других строк и для всех столбцов доказательство вполне аналогично). Иными словами, требуется доказать, что

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{4}$$

В самом деле, отталкиваясь от определения определителя третьего порядка, имеем

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Равенство (4) называется *разложением определителя третьего порядка по первой строке*. Формулы разложения определителя третьего порядка по двум другим строкам и по всем столбцам записываются и доказываются аналогично формуле (4). В качестве примера, напишем формулу разложения определителя третьего порядка по второму столбцу:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

## 0.4. Свойства определителей

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

**Определение**

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Матрицей, *транспонированной* к $A$, называется матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$, определяемая равенством $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Иными словами, матрица $B$ получается из $A$ заменой строк на столбцы: первая строка матрицы $A$ становится первым стобцом матрицы $B$, вторая строка матрицы $A$ — вторым стобцом матрицы $B$ и т. д. Матрица, транспонированная к $A$ обозначается через $A^\top$.

Очевидно, что

- матрица, транспонированная к квадратной, является квадратной матрицей того же порядка, что и исходная матрица.

Укажем ряд свойств определителей второго и третьего порядков.

### Свойства определителей

*Пусть $A$ — квадратная матрица второго или третьего порядка.*

1) *Если все элементы некоторой строки [некоторого столбца] матрицы $A$ умножить на одно и то же число, то ее определитель умножится на то же самое число.*
2) *Если матрица $A$ содержит нулевую строку [нулевой столбец], то ее определитель равен нулю.*
3) *Если две строки [два столбца] матрицы $A$ поменять местами, то ее определитель умножится на $-1$.*
4) *Если матрица $A$ содержит две одинаковые строки [два одинаковых столбца], то ее определитель равен нулю.*
5) *Если к некоторой строке [некоторому столбцу] матрицы $A$ прибавить другую ее строку, умноженную на некоторое число [другой ее столбец, умноженный на некоторое число], то ее определитель не изменится.*
6) *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется (иными словами, $|A^\top| = |A|$).*

# Доказательство свойств 1) и 2)

**Доказательство.** Если $A$ — квадратная матрица второго порядка, то все свойства проверяются прямыми и несложными вычислениями, основанными на определении определителя второго порядка. Поэтому далее будем считать, что $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка.

1) Для определенности будем считать, что речь идет о первой строке матрицы (во всех остальных случаях доказательство абсолютно аналогично). Обозначим через $A' = (a'_{ij})$ матрицу, полученную после умножения первой строки матрицы $A$ на ненулевое число $t$. Алгебраическое дополнение элемента $a'_{ij}$ будем обозначать через $A'_{ij}$. Поскольку вторые и третьи строки в матрицах $A$ и $A'$ совпадают, имеем $A'_{1j} = A_{1j}$ для $j = 1, 2, 3$. Раскладывая определитель матрицы $A'$ по первой строке, имеем:

$$|A'| = ta_{11}A_{11} + ta_{12}A_{12} + ta_{13}A_{13} = t(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = t \cdot |A|,$$

что и требовалось доказать.

2) Разлагая определитель матрицы $A$ по нулевой строке (или нулевому столбцу), с очевидностью получаем, что $|A| = 0$.

3) Для определенности будем считать, что мы переставили местами первые две строки матрицы $A$ (во всех остальных случаях доказательство абсолютно аналогично). Раскладывая определитель полученной матрицы по второй строке, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= -(a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}) =$$
$$= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = -|A|,$$

что и требовалось доказать.

4) Это свойство легко вытекает из предыдущего. В самом деле, если поменять местами две одинаковых строки (два одинаковых столбца), то определитель матрицы, с одной стороны, не изменится (так как матрица останется той же самой), а с другой умножится на $-1$ (по предыдущему свойству). Но единственное число, которое при умножении на $-1$ не меняется, — это число 0.

5) Для определенности будем считать, что к первой строке матрицы $A$ прибавляется ее вторая строка (во всех остальных случаях доказательство абсолютно аналогично). Обозначим через $A' = (a'_{ij})$ матрицу, полученную в результате указанного действия. Как и в доказательстве свойства 1), имеем $A'_{1j} = A_{1j}$ для $j = 1, 2, 3$. Раскладывая определитель матрицы $A'$ по первой строке и используя свойство 4), имеем:

$$\begin{aligned} |A'| &= (a_{11} + ta_{21})A_{11} + (a_{12} + ta_{22})A_{12} + (a_{13} + ta_{23})A_{13} = \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + t(a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}) = \\ &= |A| + t \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + t \cdot 0 = |A|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6) Вычисляя определитель матрицы $A^\top$ по определению, имеем:

$$|A^\top| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = |A|,$$

что и требовалось доказать. $\square$