Определение знакочередующиеся ряды

Опр. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n+1}b_n \ldots$$

$$b_n > 0$$

называется знакочередующимся.

Признак Лейбница

Теорема 1 (признак Лейбница).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n+1} \ldots$$

- знакочередующийся ряд и

1) $b_n > 0$;

2) $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n > \cdots (b_n \downarrow)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \ (b_n \to 0)$,

Признак Лейбница

Тогда

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ **сходится**;

б) сумма ряда $S > 0$;

в) $S < b_1$.

Признак Лейбница. Задача 1

<u>Задача 1</u>. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$$

<u>Решение</u>.

Ряд является знакочередующимся.

Поэтому применим **признак Лейбница**.

Признак Лейбница. Задача 1

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow b_n = |u_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n,\ b_n = \frac{1}{n},\ b_n > 0;$

2) $b_n \downarrow$

3) $b_n \to 0$

Ответ: ряд сходится по признаку Лейбница.

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда

Сумма знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n+1}b_n \ldots$$

$$(b_n > 0)$$

равна

$$\boxed{S = S_n + R_n}$$

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n+1} b_n$$

- частичная сумма;

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k = (-1)^{n+1} \left(b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - \ldots \right)$$

- остаток ряда, т.е. погрешность приближения

$$\boxed{S \approx S_n}$$

Оценка остатка знакочередующегося ряда

Теорема 2 . Если R_n – остаток знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n+1}b_n \ldots \quad (b_n > 0),$$

то

$$\boxed{|R_n| < b_{n+1}}$$

(модуль остатка знакочередующегося ряда меньше модуля первого отбрасываемого члена).

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда. Задача 2

Задача 2. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \ldots$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}1$.

Решение. Это знакочередующийся ряд.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow b_n = |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда. Задача 2

Выполняются условия (1)-(3) теоремы 1.

$\Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница.

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow |R_n| < b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \le 0{,}1$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 > 10 \;\Rightarrow\; n > \sqrt{10} - 1 \;\Rightarrow\; n > 2$$

$$S = S_3 + R_3, \quad S \approx S_3, R_3 < 0.1 \Rightarrow$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \approx 0{,}9$$

Ответ: $S \approx 0{,}9 \pm 0{,}1.$

Абсолютная и условная сходимость

Опр. Если для знакопеременного ряда

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ряд из модулей

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

сходится, то говорят, исходный ряд (1) абсолютно сходится.

Абсолютная и условная сходимость

Теорема 3. Если ряд (2) сходится, то ряд (1) тоже сходится.

Т.е. если ряд **сходится абсолютно**, то он просто **сходится**.

Без док-ва.

Абсолютная и условная сходимость

<u>Опр.</u> Если знакопеременный ряд

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, а ряд из модулей

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

расходится, то говорят, что исходный ряд (1) сходится условно.

Абсолютная и условная сходимость Задача 3

Задача 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \ldots$$

Решение.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 4

Ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится как гармонический ряд $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha = 2\right)$.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

<u>Ответ:</u> абсолютно сходится.

Абсолютная и условная сходимость
Задача 4

Задача 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$$

Решение.

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\;\Rightarrow\;|u_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 4

Ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится, а исходный ряд сходится по признаку Лейбница (см. задачу 1).

Значит, исходный ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно.

Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

1) Находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \left(\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| \right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \left(\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0 \right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \left(\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| \neq 0 \right)$

$\Downarrow$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

2) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится

$\Downarrow$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится

3) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

$\Downarrow$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

$\Downarrow$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

Абсолютная и условная сходимость
Задача 5

Задача 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{2n+1}}$$

Решение.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{2n+1}} \Rightarrow |u_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{2n+1}}\right| = \frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 5

1) Найдем

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow$$ **сходимость возможна**

2) Исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{2n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 5

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ – сходится как гармонический ряд ($\alpha = \frac{4}{3}$)

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится

<u>Ответ:</u> сходится абсолютно.

Абсолютная и условная сходимость
Задача 6

Задача 6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$$

Решение.

$$u_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}\Rightarrow |u_n|=\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}\right|=\frac{n}{n+2}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 6

1) Найдем

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

<u>Ответ:</u> ряд расходится.

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

Задача 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Решение.

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \Rightarrow |u_n| = \left|(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right| = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

1) Найдем

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow$$ **сходимость возможна**

2) Исследуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

Применим **интегральный признак Коши**.
Проверим его условия.

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \Rightarrow$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; 2) $u_n \downarrow$; 3) $f(n) = u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ непрерывна, $f(x) > 0, f(x) \downarrow$ на $[2, +\infty]$;

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

Интеграл $\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx =$

$$= \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ x = 2 \to t = \ln 2 \\ x = +\infty \to t = +\infty \end{bmatrix} =$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_{ln\,2}^{+\infty} = \left[\sqrt{+\infty} - \ln 2\right] = +\infty$$

Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$ расходится $\Rightarrow$

ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ расходится.

исходный ряд **не сходится абсолютно**.

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

3) Исследуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$$

3) Он знакочередующийся и поэтому применим **признак Лейбница.**

$$b_n = |u_n| = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Абсолютная и условная сходимость
Задача 7

Проверим условия признака Лейбница:

1) $b_n > 0$; 2) $b_n \downarrow$; 3) $b_n \to 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}} \text{ сходится.}$$

<u>Ответ:</u> ряд сходится условно.