



Построение и анализ алгоритмов, МГКН/МГФИИТ, I семестр, экзамен

1. [15 баллов] Дайте определение класса PSPACE и PSPACE-полной задачи. Сформулируйте задачу QSAT и докажите, что она лежит в PSPACE.

2. [20 баллов] Дайте определение класса FPTAS. Приведите алгоритм, решающий задачу о рюкзаке методом динамического программирования и позволяющий построить FPTAS за счет округления.

3. [20 баллов] Приведите жадный алгоритм поиска максимального независимого множества в невзвешенном лесу и докажите его оптимальность, используя метод обмена.

4. [25 баллов] Приведите рандомизированный алгоритм “разделяй и властвуй” для поиска k -го по величине элемента в n -элементном неотсортированном массиве и выведите верхнюю оценку для среднего времени его работы (чем точнее оценка, тем лучше). Далее оцените, для каких k детерминированным алгоритмом можно решить задачу быстрее.

5. [20 баллов] В вычислительной системе выполняется n процессов; в каждом раунде часть процессов выполняется, остальные — ждут. Два процесса конфликтуют, если для их выполнения нужен один и тот же ресурс системы. Система ломается, если конфликтующие процессы пытаются выполниться в одном раунде. Каждый процесс конфликтует ровно с d другими и может коммуницировать со своими конфликтёрами (и только с ними), после чего самостоятельно принимает решение, выполняться ли ему в следующем раунде. Рассмотрим следующий алгоритм, единый для всех процессов:

- сгенерировать случайный бит, равный 1 с вероятностью p ;
- обменяться сгенерированными битами со всеми своими конфликтёрами;
- выполняться в следующем раунде тогда и только тогда, когда собственный бит равен 1, а все биты конфликтёров равны 0.

Докажите, что при выполнении этого алгоритма система не сломается и найдите ожидаемое (а) число выполняемых в раунде процессов (б) количество подряд идущих “простойных” раундов для процесса. Какое p нужно взять для максимизации первой величины и минимизации второй?