Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

§ 6. Псевдообратное отображение

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

Снова о псевдорешениях

Псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

Мы доказали, что псевдорешения суть в точности решения (в обычном смысле) системы $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$, где A^* — *эрмитово сопряженная* матрица к A (метод наименьших квадратов). Эта система всегда совместна.

Псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

Мы доказали, что псевдорешения суть в точности решения (в обычном смысле) системы $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$, где A^* — *эрмитово сопряженная* матрица к A (метод наименьших квадратов). Эта система всегда совместна.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных, система $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ имеет единственное решение, а следовательно, исходная система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет *единственное* псевдорешение.

Псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

Мы доказали, что псевдорешения суть в точности решения (в обычном смысле) системы $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$, где A^* — *эрмитово сопряженная* матрица к A (метод наименьших квадратов). Эта система всегда совместна.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных, система $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ имеет единственное решение, а следовательно, исходная система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет *единственное* псевдорешение.

Если псевдорешение неединственно, то интересуются псевдорешением наименьшей длины (оно называется *нормальным* псевдорешением).

Снова о псевдорешениях

Псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

Мы доказали, что псевдорешения суть в точности решения (в обычном смысле) системы $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$, где A^* — *эрмитово сопряженная* матрица к A (метод наименьших квадратов). Эта система всегда совместна.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных, система $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ имеет единственное решение, а следовательно, исходная система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет *единственное* псевдорешение.

Если псевдорешение неединственно, то интересуются псевдорешением наименьшей длины (оно называется *нормальным* псевдорешением).

Займемся вопросом о том, как находить нормальные псевдорешения.

Псевдорешение системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

Мы доказали, что псевдорешения суть в точности решения (в обычном смысле) системы $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$, где A^* — *эрмитово сопряженная* матрица к A (метод наименьших квадратов). Эта система всегда совместна.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных, система $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ имеет единственное решение, а следовательно, исходная система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет *единственное* псевдорешение.

Если псевдорешение неединственно, то интересуются псевдорешением наименьшей длины (оно называется *нормальным* псевдорешением).

Займемся вопросом о том, как находить нормальные псевдорешения. Заметим, что этот вопрос представляет интерес и для совместных систем с бесконечным множеством решений (*недоопределенных систем*).

Напомним обозначения $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Напомним обозначения $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}: U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$.

Напомним обозначения $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ и $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}: U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\operatorname{Im} \mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^*$, т.е. $\mathscr{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Напомним обозначения $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^{*}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^{*}$, т.е. $\mathscr{A}^{*}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Чтобы доказать, что $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$, возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$ и проверим, что $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.

Напомним обозначения $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ и $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}: U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\mathrm{Im}\,\mathscr{A})^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*$, т.е. $\mathscr{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Чтобы доказать, что $\mathbf{y} \in (\mathrm{Im}\,\mathscr{A})^{\perp}$, возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ и проверим, что $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{u}$ для некоторого вектора $\mathbf{u} \in U$, имеем

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathscr{A}^*\mathbf{y} = 0.$$

Напомним обозначения $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}: U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$, т.е. $\mathscr{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Чтобы доказать, что $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$, возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$ и проверим, что $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{u}$ для некоторого вектора $\mathbf{u} \in U$, имеем

$$\mathbf{xy} = \mathscr{A}\mathbf{uy} = \mathbf{u}\mathscr{A}^*\mathbf{y} = 0.$$

Обратно, пусть $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$; тогда $\mathbf{xy} = 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$.

Напомним обозначения $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$, т.е. $\mathscr{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Чтобы доказать, что $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$, возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$ и проверим, что $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{u}$ для некоторого вектора $\mathbf{u} \in U$, имеем

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathscr{A}^*\mathbf{y} = 0.$$

Обратно, пусть $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$; тогда $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$. Поэтому для произвольного вектора $\mathbf{u} \in U$ имеем

$$0 = \mathscr{A}\mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathscr{A}^*\mathbf{y}.$$

Напомним обозначения $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ для соответственно ядра и образа линейного отображения $\mathscr{A}$.

Теорема (Фредгольм)

Если $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $(\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$, т.е. $\mathscr{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Чтобы доказать, что $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$, возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$ и проверим, что $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{u}$ для некоторого вектора $\mathbf{u} \in U$, имеем

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathscr{A}^*\mathbf{y} = 0.$$

Обратно, пусть $\mathbf{y} \in (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp}$; тогда $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$. Поэтому для произвольного вектора $\mathbf{u} \in U$ имеем

$$0 = \mathscr{A}\mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathscr{A}^*\mathbf{y}.$$

Вектор $\mathscr{A}^*\mathbf{y}$ ортогонален произвольному вектору $\mathbf{u} \in U$, и потому он нулевой. Отсюда $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$. $\square$

Следствие (альтернатива Фредгольма)

Пусть A — $n \times k$-матрица над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Либо система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение при любой правой части $\mathbf{b} \in F^n$, либо сопряжённая система $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{y} \in F^k \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Следствие (альтернатива Фредгольма)

Пусть A — $n \times k$-матрица над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Либо система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение при любой правой части $\mathbf{b} \in F^n$, либо сопряжённая система $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{y} \in F^k \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\mathscr{A} : F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$.

Следствие (альтернатива Фредгольма)

Пусть A — $n \times k$-матрица над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Либо система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение при любой правой части $\mathbf{b} \in F^n$, либо сопряжённая система $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{y} \in F^k \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\mathscr{A} : F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$. Образ $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ этого отображения состоит из всех таких столбцов $\mathbf{b} \in F^n$, что система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение.

Следствие (альтернатива Фредгольма)

Пусть A — $n \times k$-матрица над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Либо система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение при любой правой части $\mathbf{b} \in F^n$, либо сопряжённая система $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{y} \in F^k \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\mathscr{A} : F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$. Образ $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ этого отображения состоит из всех таких столбцов $\mathbf{b} \in F^n$, что система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение. Если $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ — собственное подпространство в F^n, то подпространство $\operatorname{Ker} \mathscr{A}^* = (\operatorname{Im} \mathscr{A})^\perp$ ненулевое.

Следствие (альтернатива Фредгольма)

Пусть A — $n \times k$-матрица над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Либо система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение при любой правой части $\mathbf{b} \in F^n$, либо сопряжённая система $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{y} \in F^k \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\mathscr{A} : F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$. Образ $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ этого отображения состоит из всех таких столбцов $\mathbf{b} \in F^n$, что система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение. Если $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ — собственное подпространство в F^n, то подпространство $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^* = (\operatorname{Im}\mathscr{A})^\perp$ ненулевое. Любой ненулевой вектор $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$ будет нетривиальным решением системы $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. □

Построение псевдообратного отображения

Пусть, как и выше, $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением.

Пусть, как и выше, $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Теорема Фредгольма дает ортогональное разложение пространства V:

$$V = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Пусть, как и выше, $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Теорема Фредгольма дает ортогональное разложение пространства V:

$$V = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}.$$

Применяя ту же теорему к сопряженному отображению $\mathscr{A}^*\colon V \to U$, получим ортогональное разложение пространства U:

$$U = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}^*.$$

Пусть, как и выше, $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Теорема Фредгольма дает ортогональное разложение пространства V:

$$V = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Применяя ту же теорему к сопряженному отображению $\mathscr{A}^*\colon V \to U$, получим ортогональное разложение пространства U:

$$U = \operatorname{Ker} \mathscr{A} \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}^*.$$

Положим $U_0 := \operatorname{Im} \mathscr{A}^*$, $V_0 := \operatorname{Im} \mathscr{A}$ и обозначим через $\mathscr{A}_0$ *ограничение* отображения $\mathscr{A}$ на подпространство U_0.

Пусть, как и выше, $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Теорема Фредгольма дает ортогональное разложение пространства V:

$$V = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}.$$

Применяя ту же теорему к сопряженному отображению $\mathscr{A}^*\colon V \to U$, получим ортогональное разложение пространства U:

$$U = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}^*.$$

Положим $U_0 := \operatorname{Im}\mathscr{A}^*$, $V_0 := \operatorname{Im}\mathscr{A}$ и обозначим через $\mathscr{A}_0$ *ограничение* отображения $\mathscr{A}$ на подпространство U_0. Это означает, что вектор $\mathscr{A}_0\mathbf{x}$ определен, только если $\mathbf{x} \in U_0$, и в этом случае $\mathscr{A}_0\mathbf{x} := \mathscr{A}\mathbf{x}$.

Пусть, как и выше, $\mathscr{A}\colon U \to V$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Теорема Фредгольма дает ортогональное разложение пространства V:

$$V = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Применяя ту же теорему к сопряженному отображению $\mathscr{A}^*\colon V \to U$, получим ортогональное разложение пространства U:

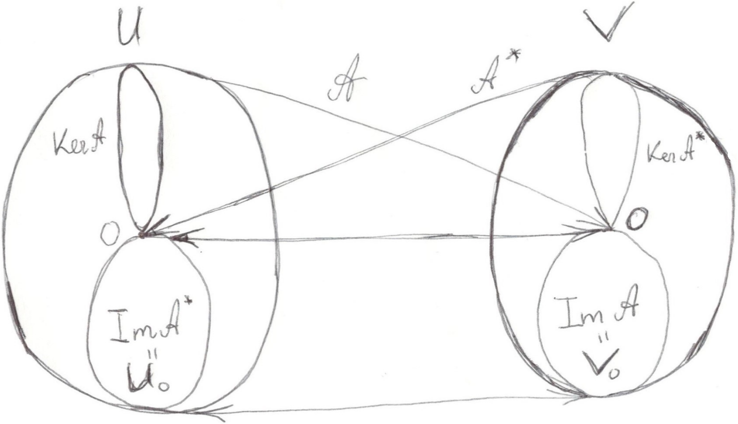
$$U = \operatorname{Ker} \mathscr{A} \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}^*.$$

Положим $U_0 := \operatorname{Im} \mathscr{A}^*$, $V_0 := \operatorname{Im} \mathscr{A}$ и обозначим через $\mathscr{A}_0$ *ограничение* отображения $\mathscr{A}$ на подпространство U_0. Это означает, что вектор $\mathscr{A}_0\mathbf{x}$ определен, только если $\mathbf{x} \in U_0$, и в этом случае $\mathscr{A}_0\mathbf{x} := \mathscr{A}\mathbf{x}$.

Предложение

$\mathscr{A}_0$ — взаимно однозначное отображение U_0 на V_0.

Конфигурация из предложения



Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно.
Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0. Возьмем произвольный $\mathbf{y} \in V_0$. Поскольку $V_0 = \operatorname{Im} \mathscr{A}$, найдется вектор $\mathbf{x} \in U$ такой, что $\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x}$.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0. Возьмем произвольный $\mathbf{y} \in V_0$. Поскольку $V_0 = \operatorname{Im} \mathscr{A}$, найдется вектор $\mathbf{x} \in U$ такой, что $\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x}$. Пользуясь ортогональным разложением $U = \operatorname{Ker} \mathscr{A} \oplus U_0$, представим $\mathbf{x}$ как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, где $\mathbf{x}_0 \in U_0$, а $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0. Возьмем произвольный $\mathbf{y} \in V_0$. Поскольку $V_0 = \operatorname{Im}\mathscr{A}$, найдется вектор $\mathbf{x} \in U$ такой, что $\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x}$. Пользуясь ортогональным разложением $U = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus U_0$, представим $\mathbf{x}$ как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, где $\mathbf{x}_0 \in U_0$, а $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Тогда

$$\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x} = \mathscr{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 + \mathscr{A}\mathbf{z} = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_0. \qquad \square$$

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0. Возьмем произвольный $\mathbf{y} \in V_0$. Поскольку $V_0 = \operatorname{Im}\mathscr{A}$, найдется вектор $\mathbf{x} \in U$ такой, что $\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x}$. Пользуясь ортогональным разложением $U = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus U_0$, представим $\mathbf{x}$ как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, где $\mathbf{x}_0 \in U_0$, а $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Тогда

$$\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x} = \mathscr{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 + \mathscr{A}\mathbf{z} = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_0.$$ □

В силу предложения у отображения $\mathscr{A}_0\colon U_0 \to V_0$ есть обратное отображение $\mathscr{A}_0^{-1}\colon V_0 \to U_0$.

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0. Возьмем произвольный $\mathbf{y} \in V_0$. Поскольку $V_0 = \operatorname{Im}\mathscr{A}$, найдется вектор $\mathbf{x} \in U$ такой, что $\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x}$. Пользуясь ортогональным разложением $U = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus U_0$, представим $\mathbf{x}$ как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, где $\mathbf{x}_0 \in U_0$, а $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Тогда

$$\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x} = \mathscr{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 + \mathscr{A}\mathbf{z} = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_0. \qquad \square$$

В силу предложения у отображения $\mathscr{A}_0\colon U_0 \to V_0$ есть обратное отображение $\mathscr{A}_0^{-1}\colon V_0 \to U_0$. Обозначим через $\mathscr{P}_0$ ортопроектор V на V_0 и положим $\mathscr{A}^+ := \mathscr{A}_0^{-1}\mathscr{P}_0$. Линейное отображение $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ называется *псевдообратным* к отображению $\mathscr{A}$ (или *обратным Мура–Пенроуза*).

Доказательство. Проверим, что отображение $\mathscr{A}_0$ взаимно однозначно. Пусть $\mathscr{A}_0\mathbf{x}_1 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_2$ для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_0$. Тогда $\mathscr{A}_0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Но $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap U_0 = \{\mathbf{0}\}$, поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Проверим, что $\mathscr{A}_0$ отображает U_0 на V_0. Возьмем произвольный $\mathbf{y} \in V_0$. Поскольку $V_0 = \operatorname{Im}\mathscr{A}$, найдется вектор $\mathbf{x} \in U$ такой, что $\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x}$. Пользуясь ортогональным разложением $U = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus U_0$, представим $\mathbf{x}$ как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, где $\mathbf{x}_0 \in U_0$, а $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Тогда

$$\mathbf{y} = \mathscr{A}\mathbf{x} = \mathscr{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 + \mathscr{A}\mathbf{z} = \mathscr{A}\mathbf{x}_0 = \mathscr{A}_0\mathbf{x}_0. \qquad \square$$

В силу предложения у отображения $\mathscr{A}_0\colon U_0 \to V_0$ есть обратное отображение $\mathscr{A}_0^{-1}\colon V_0 \to U_0$. Обозначим через $\mathscr{P}_0$ ортопроектор V на V_0 и положим $\mathscr{A}^+ := \mathscr{A}_0^{-1}\mathscr{P}_0$. Линейное отображение $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ называется *псевдообратным* к отображению $\mathscr{A}$ (или *обратным Мура–Пенроуза*).

Идея псевдообращения восходит к работе Эрика Ивара Фредгольма 1903 г. Элиаким Гастингс Мур ввел это понятие в 1920 г., Арне Бьерхаммар — в 1951 г., а Роджер Пенроуз (нобелевский лауреат этого года) — в 1955 г.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+. Отметим, что псевдообратная матрица существует для любой матрицы (не обязательно квадратной). Если же матрица A квадратная и обратимая, то $A^+ = A^{-1}$.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

Доказательство. Пусть A — $n \times k$-матрица. Введем линейное отображение $\mathscr{A}\colon F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$; тогда матрица A^+ отвечает отображению $\mathscr{A}^+$.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^{+}\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^{+}.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^{+}\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

Доказательство. Пусть A — $n \times k$-матрица. Введем линейное отображение $\mathscr{A}\colon F^{k} \to F^{n}$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$; тогда матрица A^{+} отвечает отображению $\mathscr{A}^{+}$. По построению $A^{+} = A_0^{-1}P_0$, где A_0 и P_0 — матрицы обратимого отображения $\mathscr{A}_0$ и ортопроектора $\mathscr{P}_0$ соответственно.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

Доказательство. Пусть A — $n \times k$-матрица. Введем линейное отображение $\mathscr{A}\colon F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$; тогда матрица A^+ отвечает отображению $\mathscr{A}^+$. По построению $A^+ = A_0^{-1}P_0$, где A_0 и P_0 — матрицы обратимого отображения $\mathscr{A}_0$ и ортопроектора $\mathscr{P}_0$ соответственно. $P_0\mathbf{b}$ — это ортогональная проекция столбца $\mathbf{b}$ на подпространство $\operatorname{Im}\mathscr{A}$, поэтому псевдорешения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это столбцы $\mathbf{x} \in F^k$, удовлетворяющие $A\mathbf{x} = P_0\mathbf{b}$.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}: U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+: V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

Доказательство. Пусть A — $n \times k$-матрица. Введем линейное отображение $\mathscr{A}: F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$; тогда матрица A^+ отвечает отображению $\mathscr{A}^+$. По построению $A^+ = A_0^{-1}P_0$, где A_0 и P_0 — матрицы обратимого отображения $\mathscr{A}_0$ и ортопроектора $\mathscr{P}_0$ соответственно. $P_0\mathbf{b}$ — это ортогональная проекция столбца $\mathbf{b}$ на подпространство $\operatorname{Im}\mathscr{A}$, поэтому псевдорешения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это столбцы $\mathbf{x} \in F^k$, удовлетворяющие $A\mathbf{x} = P_0\mathbf{b}$. Столбец $A^+\mathbf{b} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}^*$ этому равенству удовлетворяет, так как $A\left(A^+\mathbf{b}\right) = A_0\left(A_0^{-1}P_0\mathbf{b}\right) = P_0\mathbf{b}$.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

Доказательство. Пусть A — $n \times k$-матрица. Введем линейное отображение $\mathscr{A}\colon F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$; тогда матрица A^+ отвечает отображению $\mathscr{A}^+$. По построению $A^+ = A_0^{-1}P_0$, где A_0 и P_0 — матрицы обратимого отображения $\mathscr{A}_0$ и ортопроектора $\mathscr{P}_0$ соответственно. $P_0\mathbf{b}$ — это ортогональная проекция столбца $\mathbf{b}$ на подпространство $\operatorname{Im}\mathscr{A}$, поэтому псевдорешения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это столбцы $\mathbf{x} \in F^k$, удовлетворяющие $A\mathbf{x} = P_0\mathbf{b}$. Столбец $A^+\mathbf{b} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}^*$ этому равенству удовлетворяет, так как $A\left(A^+\mathbf{b}\right) = A_0\left(A_0^{-1}P_0\mathbf{b}\right) = P_0\mathbf{b}$. Итак, $A^+\mathbf{b}$ — псевдорешение, и любое псевдорешение представимо в виде $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b} + \mathbf{z}$, где $z \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} = (\operatorname{Im}\mathscr{A}^*)^\perp$.

Если A — матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon U \to V$ в некоторых ортонормированных базисах пространств U и V, то матрица псевдообратного отображения $\mathscr{A}^+\colon V \to U$ в тех же базисах называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается через A^+.

Теорема (нормальное псевдорешение)

Для любой системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ формула $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ возвращает ее нормальное псевдорешение.

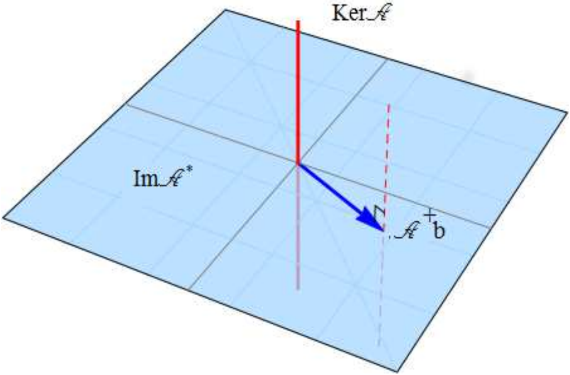
Доказательство. Пусть A — $n \times k$-матрица. Введем линейное отображение $\mathscr{A}\colon F^k \to F^n$, определяемое матрицей A по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} := A\mathbf{u}$; тогда матрица A^+ отвечает отображению $\mathscr{A}^+$. По построению $A^+ = A_0^{-1}P_0$, где A_0 и P_0 — матрицы обратимого отображения $\mathscr{A}_0$ и ортопроектора $\mathscr{P}_0$ соответственно. $P_0\mathbf{b}$ — это ортогональная проекция столбца $\mathbf{b}$ на подпространство $\operatorname{Im}\mathscr{A}$, поэтому псевдорешения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это столбцы $\mathbf{x} \in F^k$, удовлетворяющие $A\mathbf{x} = P_0\mathbf{b}$. Столбец $A^+\mathbf{b} \in \operatorname{Im}\mathscr{A}^*$ этому равенству удовлетворяет, так как $A\left(A^+\mathbf{b}\right) = A_0\left(A_0^{-1}P_0\mathbf{b}\right) = P_0\mathbf{b}$. Итак, $A^+\mathbf{b}$ — псевдорешение, и любое псевдорешение представимо в виде $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b} + \mathbf{z}$, где $z \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} = (\operatorname{Im}\mathscr{A}^*)^\perp$. По теореме Пифагора $|\mathbf{x}|^2 = |A^+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{z}|^2$, откуда длина $\mathbf{x}$ минимальна при $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$. $\square$

Практический алгоритм для нормального псевдорешения

Вычислять псевдообратную матрицу нелегко, но доказательство теоремы о нормальном псевдорешении подсказывает практически пригодный метод для нахождения такого псевдорешения.

Практический алгоритм для нормального псевдорешения

Вычислять псевдообратную матрицу нелегко, но доказательство теоремы о нормальном псевдорешении подсказывает практически пригодный метод для нахождения такого псевдорешения.



Среди всех псевдорешений (красная пунктирная прямая на рисунке) нормальное выделяется тем, что оно ортогонально ядру $\mathscr{A}$, т.е. пространству решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Вычислять псевдообратную матрицу нелегко, но доказательство теоремы о нормальном псевдорешении подсказывает практически пригодный метод для нахождения такого псевдорешения.

Среди всех псевдорешений нормальное выделяется тем, что оно ортогонально ядру $\mathscr{A}$, т.е. пространству решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Найдем базис этого ядра, т.е. фундаментальную систему решений, и составим из столбцов фундаментальной системы матрицу F.

Вычислять псевдообратную матрицу нелегко, но доказательство теоремы о нормальном псевдорешении подсказывает практически пригодный метод для нахождения такого псевдорешения.

Среди всех псевдорешений нормальное выделяется тем, что оно ортогонально ядру $\mathscr{A}$, т.е. пространству решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Найдем базис этого ядра, т.е. фундаментальную систему решений, и составим из столбцов фундаментальной системы матрицу F. Нормальное псевдорешение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ будет единственным одновременным решением объединенной системы $\begin{cases} A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}, \\ F^*\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$.

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ удовлетворяет следующим четырем тождествам:

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$

$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ *удовлетворяет следующим четырем тождествам:*

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ *удовлетворяет тождествам* (1)–(4) *с* $\mathscr{B}$*, подставленным вместо* $\mathscr{A}^+$*, то* $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ *удовлетворяет следующим четырем тождествам:*

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ *удовлетворяет тождествам* (1)–(4) *с* $\mathscr{B}$*, подставленным вместо* $\mathscr{A}^+$*, то* $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.

Доказательство. Тождества (1)–(4) легко выводятся из предложенной конструкции для $\mathscr{A}^+$.

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ *удовлетворяет следующим четырем тождествам:*

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ *удовлетворяет тождествам* (1)–(4) *с* $\mathscr{B}$*, подставленным вместо* $\mathscr{A}^+$*, то* $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.

Доказательство. Тождества (1)–(4) легко выводятся из предложенной конструкции для $\mathscr{A}^+$. Например, легко подсчитать, что $\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{P}_0$, а ортопроектор $\mathscr{P}_0$ самосопряжен.

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ удовлетворяет следующим четырем тождествам:

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ удовлетворяет тождествам (1)–(4) с $\mathscr{B}$, подставленным вместо $\mathscr{A}^+$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.

Допустим, что $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ удовлетворяет тождествам (1)–(4).

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ удовлетворяет следующим четырем тождествам:

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ удовлетворяет тождествам (1)–(4) *с $\mathscr{B}$, подставленным вместо $\mathscr{A}^+$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.*

Допустим, что $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ удовлетворяет тождествам (1)–(4). Тогда

$$\mathscr{A}\mathscr{B}_1 \overset{(3)}{=} (\mathscr{A}\mathscr{B}_2\mathscr{A})\mathscr{B}_1 = (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)(\mathscr{A}\mathscr{B}_1) \overset{(1)}{=} (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1)^* =$$
$$= \mathscr{B}_2{}^*\mathscr{A}^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1)^* = \mathscr{B}_2{}^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1\mathscr{A})^* \overset{(3)}{=} \mathscr{B}_2{}^*\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)^* \overset{(1)}{=} \mathscr{A}\mathscr{B}_2.$$

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ *удовлетворяет следующим четырем тождествам:*

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ *удовлетворяет тождествам* (1)–(4) *с* $\mathscr{B}$, *подставленным вместо* $\mathscr{A}^+$, *то* $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.

Допустим, что $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ удовлетворяет тождествам (1)–(4). Тогда

$$\mathscr{A}\mathscr{B}_1 \overset{(3)}{=} (\mathscr{A}\mathscr{B}_2\mathscr{A})\mathscr{B}_1 = (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)(\mathscr{A}\mathscr{B}_1) \overset{(1)}{=} (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1)^* =$$
$$= \mathscr{B}_2{}^*\mathscr{A}^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1)^* = \mathscr{B}_2{}^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1\mathscr{A})^* \overset{(3)}{=} \mathscr{B}_2{}^*\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)^* \overset{(1)}{=} \mathscr{A}\mathscr{B}_2.$$

Аналогично проверяется, что $\mathscr{B}_1\mathscr{A} = \mathscr{B}_2\mathscr{A}$.

Псевдообратное отображение и псевдообратные матрицы пригождаются не только при решении несовместных систем, поэтому обсудим их подробней.

Теорема (Пенроуз)

Отображение $\mathscr{A}^+$ удовлетворяет следующим четырем тождествам:

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^+)^* = \mathscr{A}\mathscr{A}^+ \quad (1), \qquad \mathscr{A}\mathscr{A}^+\mathscr{A} = \mathscr{A} \quad (3),$$
$$(\mathscr{A}^+\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^+\mathscr{A} \quad (2), \qquad \mathscr{A}^+\mathscr{A}\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^+ \quad (4).$$

Обратно, если некоторое линейное отображение $\mathscr{B}$ удовлетворяет тождествам (1)–(4) с $\mathscr{B}$, подставленным вместо $\mathscr{A}^+$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+$.

Допустим, что $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ удовлетворяет тождествам (1)–(4). Тогда

$$\mathscr{A}\mathscr{B}_1 \overset{(3)}{=} (\mathscr{A}\mathscr{B}_2\mathscr{A})\mathscr{B}_1 = (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)(\mathscr{A}\mathscr{B}_1) \overset{(1)}{=} (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1)^* =$$
$$= {\mathscr{B}_2}^*\mathscr{A}^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1)^* = {\mathscr{B}_2}^*(\mathscr{A}\mathscr{B}_1\mathscr{A})^* \overset{(3)}{=} {\mathscr{B}_2}^*\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}\mathscr{B}_2)^* \overset{(1)}{=} \mathscr{A}\mathscr{B}_2.$$

Аналогично проверяется, что $\mathscr{B}_1\mathscr{A} = \mathscr{B}_2\mathscr{A}$. Теперь имеем

$$\mathscr{B}_1 \overset{(4)}{=} \mathscr{B}_1\mathscr{A}\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_1\mathscr{A}\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}_2\mathscr{A}\mathscr{B}_2 \overset{(4)}{=} \mathscr{B}_2.$$

□

Лемма (скелетное разложение)

Пусть A — $n \times k$-матрица ранга r над произвольным полем. Тогда $A = BC$, где B — $n \times r$-матрица ранга r, а C — $r \times k$-матрица ранга r.

Лемма (скелетное разложение)

Пусть A — $n \times k$-матрица ранга r над произвольным полем. Тогда $A = BC$, где B — $n \times r$-матрица ранга r, а C — $r \times k$-матрица ранга r.

Доказательство. Из доказательства теоремы о ранге матрицы следует, что матрицу A элементарными преобразованиями можно привести к $n \times k$-матрице R вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.

Матрицу R можно представить в виде произведения $n \times r$-матрицы S ранга r на $r \times k$-матрица T ранга r так:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{T}.$$

Матрицу R можно представить в виде произведения $n \times r$-матрицы S ранга r на $r \times k$-матрица T ранга r так:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{T}.$$

Элементарные преобразования обратимы, поэтому матрицу $R = ST$ можно некоторой последовательностью элементарных преобразований над ее строками и столбцами привести к первоначальной матрице A.

Матрицу R можно представить в виде произведения $n \times r$-матрицы S ранга r на $r \times k$-матрица T ранга r так:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{T}.$$

Элементарные преобразования обратимы, поэтому матрицу $R = ST$ можно некоторой последовательностью элементарных преобразований над ее строками и столбцами привести к первоначальной матрице A. Если преобразования со строками из этой последовательности применять к матрице S, а преобразования со столбцами — к матрице T, то из S возникнет $n \times r$-матрица B ранга r, а из T — $r \times k$-матрица C ранга r, такие, что $A = BC$.

Матрицу R можно представить в виде произведения $n \times r$-матрицы S ранга r на $r \times k$-матрица T ранга r так:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{T}.$$

Элементарные преобразования обратимы, поэтому матрицу $R = ST$ можно некоторой последовательностью элементарных преобразований над ее строками и столбцами привести к первоначальной матрице A. Если преобразования со строками из этой последовательности применять к матрице S, а преобразования со столбцами — к матрице T, то из S возникнет $n \times r$-матрица B ранга r, а из T — $r \times k$-матрица C ранга r, такие, что $A = BC$. Это следует из леммы о том, что элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы равносильны ее умножению справа (слева) на некоторые матрицы.

Вычисление псевдообратной матрицы (3)

С помощью скелетного разложения $A = BC$ данной матрицы A псевдообратную матрицу можно вычислить по формуле:

$$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}. \qquad (\star)$$

С помощью скелетного разложения $A = BC$ данной матрицы A псевдообратную матрицу можно вычислить по формуле:

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \qquad (\star)$$

Чтобы понять, что использованные здесь обратные матрицы $(CC^*)^{-1}$ и $(B^*B)^{-1}$ действительно существуют, вспомним, что ранг $n \times r$-матрицы B равен r, а потому $r \times r$-матрица B^*B обратима; аналогично, ранг $r \times k$-матрицы C равен r, а потому $r \times r$-матрица CC^* обратима.

С помощью скелетного разложения $A = BC$ данной матрицы A псевдообратную матрицу можно вычислить по формуле:

$$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}. \qquad (\star)$$

Чтобы понять, что использованные здесь обратные матрицы $(CC^{*})^{-1}$ и $(B^{*}B)^{-1}$ действительно существуют, вспомним, что ранг $n \times r$-матрицы B равен r, а потому $r \times r$-матрица $B^{*}B$ обратима; аналогично, ранг $r \times k$-матрицы C равен r, а потому $r \times r$-матрица CC^{*} обратима.

Чтобы убедиться, что формула $(\star)$ действительно возвращает псевдообратную матрицу, в силу теоремы Пенроуза достаточно подставить выражение из $(\star)$ в тождества (1)–(4) и проверить, что они выполняются.

С помощью скелетного разложения $A = BC$ данной матрицы A псевдообратную матрицу можно вычислить по формуле:

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \qquad (\star)$$

Чтобы понять, что использованные здесь обратные матрицы $(CC^*)^{-1}$ и $(B^*B)^{-1}$ действительно существуют, вспомним, что ранг $n \times r$-матрицы B равен r, а потому $r \times r$-матрица B^*B обратима; аналогично, ранг $r \times k$-матрицы C равен r, а потому $r \times r$-матрица CC^* обратима.

Чтобы убедиться, что формула $(\star)$ действительно возвращает псевдообратную матрицу, в силу теоремы Пенроуза достаточно подставить выражение из $(\star)$ в тождества (1)–(4) и проверить, что они выполняются.

Например, проверим тождество $AA^+A = A$:

$$\underbrace{BC}_{A}\,\underbrace{C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*}_{\text{кандидат в } A^+}\,\underbrace{BC}_{A} = B\,\overbrace{CC^*(CC^*)^{-1}}^{E}\,\overbrace{(B^*B)^{-1}B^*B}^{E}\,C = BC = A.$$

Пример

С помощью псевдообратной матрицы найдем нормальное псевдорешение системы
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}.$$

Пример

С помощью псевдообратной матрицы найдем нормальное псевдорешение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$, а $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

С помощью псевдообратной матрицы найдем нормальное псевдорешение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$, а $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Имеем $B^*B = 3$, $(B^*B)^{-1} = \dfrac{1}{3}$, $CC^* = 2$, $(CC^*)^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

С помощью псевдообратной матрицы найдем нормальное псевдорешение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$, а $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Имеем $B^*B = 3$, $(B^*B)^{-1} = \frac{1}{3}$, $CC^* = 2$, $(CC^*)^{-1} = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

С помощью псевдообратной матрицы найдем нормальное псевдорешение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$, а $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Имеем $B^*B = 3$, $(B^*B)^{-1} = \frac{1}{3}$, $CC^* = 2$, $(CC^*)^{-1} = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Нормальное псевдорешение $A^+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

С помощью псевдобратной матрицы найдем нормальное псевдорешение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$, а $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Имеем $B^*B = 3$, $(B^*B)^{-1} = \frac{1}{3}$, $CC^* = 2$, $(CC^*)^{-1} = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Нормальное псевдорешение $A^+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Геометрический смысл: точка (1,1) одновременно минимизирует и суммарное расстояние от трех параллельных прямых $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 + x_2 = 3$, и расстояние до начала координат.