Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

§ 5. Сопряженное отображение

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Построение сопряженного отображения

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Пусть $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение.

Пусть $\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$.

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ — линейный функционал на пространстве V_1.

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ — линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} \qquad \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}$$

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ — линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}\\
&= (\mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{A}\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{в силу линейности } \mathscr{A}
\end{aligned}$$

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ — линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}\\
&= (\mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{A}\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{в силу линейности } \mathscr{A}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} + \mathscr{A}\mathbf{y} \circ_2 \mathbf{r} && \text{свойство скалярного произведения}
\end{aligned}$$

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ — линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}} \\
&= (\mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{A}\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{в силу линейности } \mathscr{A} \\
&= \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} + \mathscr{A}\mathbf{y} \circ_2 \mathbf{r} && \text{свойство скалярного произведения} \\
&= \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) + \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение (*линейный оператор*) пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 — свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ — через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ — линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}\\
&= (\mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{A}\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{в силу линейности } \mathscr{A}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} + \mathscr{A}\mathbf{y} \circ_2 \mathbf{r} && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) + \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\Phi_{\mathbf{r}}(\lambda x) = \lambda\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ для любого $\lambda \in F$.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным отображением* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным отображением* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Построение дает *ключевое тождество для сопряженного отображения*:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным отображением* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Построение дает *ключевое тождество для сопряженного отображения*:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{$\dagger$}$$

Как мы увидим дальше, ключевое тождество — мощный и исключительно полезный инструмент. Именно оно применяется во всех рассмотрениях, связанных с сопряженными отображениями; построение же нужно только для того, чтобы обосновать, что сопряженное отображение существует.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным отображением* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Построение дает *ключевое тождество для сопряженного отображения*:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Как мы увидим дальше, ключевое тождество — мощный и исключительно полезный инструмент. Именно оно применяется во всех рассмотрениях, связанных с сопряженными отображениями; построение же нужно только для того, чтобы обосновать, что сопряженное отображение существует.

Замечание. Тождество $(\dagger)$ *однозначно определяет* сопряженное отображение, т.е. если для отображения $\mathscr{B}\colon V_2 \to V_1$ равенство $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ выполнено при всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{r} \in V_2$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^*$.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным отображением* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Построение дает *ключевое тождество для сопряженного отображения*:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{$\dagger$}$$

Как мы увидим дальше, ключевое тождество — мощный и исключительно полезный инструмент. Именно оно применяется во всех рассмотрениях, связанных с сопряженными отображениями; построение же нужно только для того, чтобы обосновать, что сопряженное отображение существует.

Замечание. Тождество (†) *однозначно определяет* сопряженное отображение, т.е. если для отображения $\mathscr{B}\colon V_2 \to V_1$ равенство $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ выполнено при всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{r} \in V_2$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^*$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ для всех $\mathbf{x}$, то $\mathscr{A}^*\mathbf{r} = \mathscr{B}\mathbf{r}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $\mathscr{A}^* = \mathscr{B}$. □

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства.

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество $(\dagger)$ тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{$\dagger$}$$

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{†}$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ линейно.

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^* : V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$.

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество ($\dagger$) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} \quad \text{свойство скалярного произведения}$$

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество $(\dagger)$ тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1\ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{$\dagger$}$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения} \\ &= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество } (\dagger) \end{aligned}$$

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество } (\dagger)\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{свойство скалярного произведения}
\end{aligned}$$

Линейность сопряженного отображения

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество } (\dagger)\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{тождество } (\dagger).
\end{aligned}$$

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{†}$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^*: V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество (†)}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{тождество (†).}
\end{aligned}$$

Отсюда $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$ (ослабленный закон сокращения).

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество (†) тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1\ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \tag{†}$$

Теорема (линейность сопряженного отображения)

Пусть $\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженное отображение $\mathscr{A}^* : V_2 \to V_1$ линейно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество (†)}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{тождество (†).}
\end{aligned}$$

Отсюда $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$ (ослабленный закон сокращения). Сходным образом проверяется, что $\mathscr{A}^*(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\mathscr{A}^*\mathbf{p}$ для всех $\lambda \in F$. □

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

∇1: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

∇2: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

∇3: $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

$\nabla 1$: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

$\nabla 2$: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

$\nabla 3$: $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

$\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства $\nabla 1$. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2.

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

∇1: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

∇2: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

∇3: $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства ∇1. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2. Применяя тождество (†) к отображению $\mathscr{A}^*$, получаем

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{p} \in V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1$.

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

$\nabla 1$: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

$\nabla 2$: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

$\nabla 3$: $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

$\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства $\nabla 1$. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2. Применяя тождество (†) к отображению $\mathscr{A}^*$, получаем

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\,(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{p} \in V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1$. С другой стороны,

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p}} \overset{(\dagger)}{=} \overline{\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}.$$

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

∇1: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

∇2: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

∇3: $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства ∇1. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2. Применяя тождество (†) к отображению $\mathscr{A}^*$, получаем

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{p} \in V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1$. С другой стороны,

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p}} \overset{(\dagger)}{=} \overline{\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}.$$

Итак, $\mathbf{p}\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$, откуда $\left(\mathscr{A}^*\right)^*\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $\left(\mathscr{A}^*\right)^* = \mathscr{A}$. $\square$

Укажем основные свойства взятия сопряженного отображения.

$\nabla 1$: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

$\nabla 2$: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

$\nabla 3$: $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

$\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства $\nabla 1$. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2. Применяя тождество $(\dagger)$ к отображению $\mathscr{A}^*$, получаем

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\,(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{p} \in V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1$. С другой стороны,

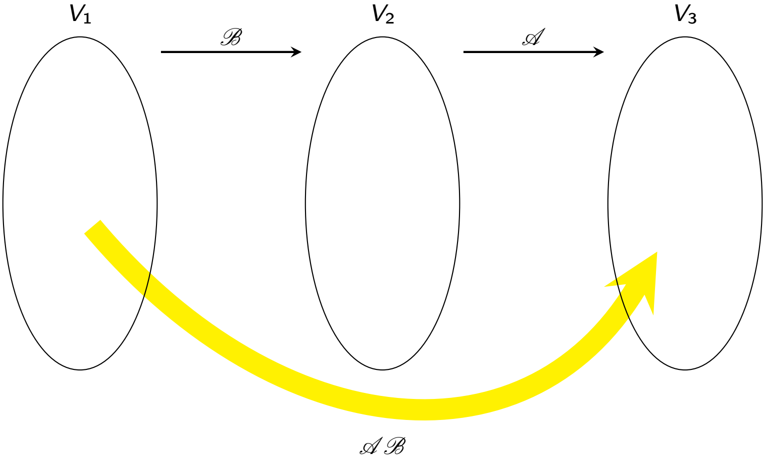
$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p}} \overset{(\dagger)}{=} \overline{\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}.$$

Итак, $\mathbf{p}\,(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$, откуда $(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$. $\square$

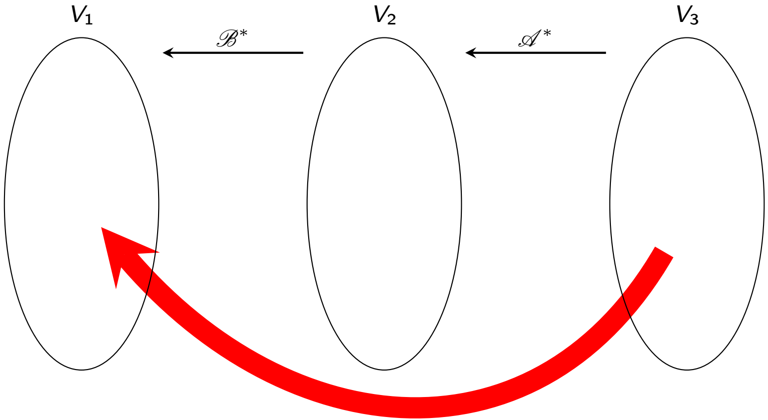
Свойства $\nabla 2$ и $\nabla 3$ докажите самостоятельно.

Обсудим свойство $\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Обсудим свойство ∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ — линейное отображение из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ — линейное отображение из V_1 в V_2.



Обсудим свойство ∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ — линейное отображение из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ — линейное отображение из V_1 в V_2. Соответственно, $\mathscr{B}^*$ — отображение из V_2 в V_1, а $\mathscr{A}^*$ — отображение из V_3 в V_2.



$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$$

Обсудим свойство $\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ — линейное отображение из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ — линейное отображение из V_1 в V_2. Соответственно, $\mathscr{B}^*$ — отображение из V_2 в V_1, а $\mathscr{A}^*$ — отображение из V_3 в V_2.

Возьмем произвольные вектора $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{s} \in V_3$. Тогда

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} \stackrel{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s}.$$

Обсудим свойство ∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ — линейное отображение из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ — линейное отображение из V_1 в V_2. Соответственно, $\mathscr{B}^*$ — отображение из V_2 в V_1, а $\mathscr{A}^*$ — отображение из V_3 в V_2.

Возьмем произвольные вектора $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{s} \in V_3$. Тогда

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} \stackrel{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s}.$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} = \mathscr{A}\,(\mathscr{B}\mathbf{x})\,\mathbf{s} \stackrel{(\dagger)}{=} \mathscr{B}\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{s} \stackrel{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}.$$

Обсудим свойство ∇4: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ — линейное отображение из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ — линейное отображение из V_1 в V_2. Соответственно, $\mathscr{B}^*$ — отображение из V_2 в V_1, а $\mathscr{A}^*$ — отображение из V_3 в V_2.

Возьмем произвольные вектора $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{s} \in V_3$. Тогда

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s}.$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} = \mathscr{A}\,(\mathscr{B}\mathbf{x})\,\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathscr{B}\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}.$$

Итак, $\mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s} = \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}$ для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{s}$, откуда $(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s} = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}$ (ослабленный закон сокращения). Это и значит, что $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. $\square$

Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ — базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — базис V_2.

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ — базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ — базис V_2. Матрица линейного отображения $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ состоит из координат векторов $\mathscr{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, записанных по столбцам:

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell.$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ — базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — базис V_2. Матрица линейного отображения $\mathscr{A} \colon V_1 \to V_2$ состоит из координат векторов $\mathscr{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathscr{A}\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, записанных по столбцам:

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{f}_j\}$ — ортонормированный, умножив справа на $\mathbf{f}_j$, получим

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\right)\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\mathbf{f}_j = \alpha_{ji}.$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ — базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ — базис V_2. Матрица линейного отображения $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ состоит из координат векторов $\mathscr{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, записанных по столбцам:

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{f}_j\}$ — ортонормированный, умножив справа на $\mathbf{f}_j$, получим

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\right)\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\mathbf{f}_j = \alpha_{ji}.$$

Отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ — тоже линейное, и его матрица состоит из координат векторов $\mathscr{A}^*\mathbf{f}_1, \ldots, \mathscr{A}^*\mathbf{f}_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$:

$$\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell.$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ — базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — базис V_2. Матрица линейного отображения $\mathscr{A} \colon V_1 \to V_2$ состоит из координат векторов $\mathscr{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathscr{A}\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, записанных по столбцам:

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{f}_j\}$ — ортонормированный, умножив справа на $\mathbf{f}_j$, получим

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\right)\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\mathbf{f}_j = \alpha_{ji}.$$

Отображение $\mathscr{A}^* \colon V_2 \to V_1$ — тоже линейное, и его матрица состоит из координат векторов $\mathscr{A}^*\mathbf{f}_1, \dots, \mathscr{A}^*\mathbf{f}_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$:

$$\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный, умножив слева на $\mathbf{e}_i$, получим

$$\mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i\left(\sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \overline{\beta_{\ell j}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_\ell = \overline{\beta_{ij}}.$$

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Но левые части этих равенств одинаковы в силу (†). Отсюда $\alpha_{ji} = \overline{\beta_{ij}}$.

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Но левые части этих равенств одинаковы в силу (†). Отсюда $\alpha_{ji} = \overline{\beta_{ij}}$. Это можно переписать как $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Мы видим, что матрица сопряженного отображения $\mathscr{A}^*$ получается, если матрицу исходного отображения $\mathscr{A}$ транспонировать и заменить каждый элемент его сопряженным.

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Но левые части этих равенств одинаковы в силу (†). Отсюда $\alpha_{ji} = \overline{\beta_{ij}}$. Это можно переписать как $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Мы видим, что матрица сопряженного отображения $\mathscr{A}^*$ получается, если матрицу исходного отображения $\mathscr{A}$ транспонировать и заменить каждый элемент его сопряженным.

Напомним, что матрица, получаемая из данной матрицы A транспонированием и заменой каждого элемента на сопряженный, называется *эрмитово сопряженной* к матрице A и обозначается через A^*: если $A = (a_{ij})_{k\times n}$, то $A^* := (\overline{a_{ji}})_{n\times k}$.

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Но левые части этих равенств одинаковы в силу (†). Отсюда $\alpha_{ji} = \overline{\beta_{ij}}$. Это можно переписать как $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Мы видим, что матрица сопряженного отображения $\mathscr{A}^*$ получается, если матрицу исходного отображения $\mathscr{A}$ транспонировать и заменить каждый элемент его сопряженным. Напомним, что матрица, получаемая из данной матрицы A транспонированием и заменой каждого элемента на сопряженный, называется *эрмитово сопряженной* к матрице A и обозначается через A^*: если $A = (a_{ij})_{k\times n}$, то $A^* := (\overline{a_{ji}})_{n\times k}$.

Итак, установлен следующий весьма полезный факт:

Предложение (матрица сопряженного отображения)

Если линейное отображение $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ имеет в ортонормированных базисах пространств V_1 и V_2 матрицу A, то сопряженное ему отображение $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ имеет в тех же базисах матрицу A^*.

Во всех рассмотрениях выше не исключался случай, когда пространства V_1 и V_2 — это одно и то же пространство V.

Во всех рассмотрениях выше не исключался случай, когда пространства V_1 и V_2 — это одно и то же пространство V. В этом важном частном случае сопоставление каждому линейному преобразованию $\mathscr{A} : V \to V$ его сопряженного преобразования становится дополнительной *унарной операцией* в кольце всех линейных преобразований пространства V.

Случай $V_1 = V_2$

Во всех рассмотрениях выше не исключался случай, когда пространства V_1 и V_2 — это одно и то же пространство V. В этом важном частном случае сопоставление каждому линейному преобразованию $\mathscr{A}: V \to V$ его сопряженного преобразования становится дополнительной *унарной операцией* в кольце всех линейных преобразований пространства V.

Наличие такой дополнительной операции позволяет:

- выделить важные типы линейных преобразований — прежде всего, *самосопряженные* (когда $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$) и *унитарные/ортогональные* (когда $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^{-1}$);
- описать устройство произвольных линейных преобразований пространств со скалярным произведением.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.
Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.
Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно.
Из ключевого тождества ($\dagger$) получаем тождество, которому удовлетворяет каждое самосопряженное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}.$$

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$. Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно. Из ключевого тождества (†) получаем тождество, которому удовлетворяет каждое самосопряженное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}.$$

Если A — матрица самосопряженного преобразования $\mathscr{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то $A^* = A$.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$. Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно.

Из ключевого тождества (†) получаем тождество, которому удовлетворяет каждое самосопряженное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}.$$

Если A — матрица самосопряженного преобразования $\mathscr{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то $A^* = A$. Матрицы над $\mathbb{C}$ со свойством $A^* = A$ называются *эрмитовыми*.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$. Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно. Из ключевого тождества (†) получаем тождество, которому удовлетворяет каждое самосопряженное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}.$$

Если A — матрица самосопряженного преобразования $\mathscr{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то $A^* = A$. Матрицы над $\mathbb{C}$ со свойством $A^* = A$ называются *эрмитовыми*. Для матриц над $\mathbb{R}$ свойство $A^* = A$ означает, что $A^T = A$; такие матрицы называются *симметрическими*.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$. Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно. Из ключевого тождества (†) получаем тождество, которому удовлетворяет каждое самосопряженное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}.$$

Если A — матрица самосопряженного преобразования $\mathscr{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то $A^* = A$. Матрицы над $\mathbb{C}$ со свойством $A^* = A$ называются *эрмитовыми*. Для матриц над $\mathbb{R}$ свойство $A^* = A$ означает, что $A^T = A$; такие матрицы называются *симметрическими*.

Пример

Матрицы Паули $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ эрмитовы.

Преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.
Из доказательства теоремы о линейности сопряженного отображения следует, что самосопряженное преобразование автоматически линейно.
Из ключевого тождества (†) получаем тождество, которому удовлетворяет каждое самосопряженное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}.$$

Если A — матрица самосопряженного преобразования $\mathscr{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то $A^* = A$. Матрицы над $\mathbb{C}$ со свойством $A^* = A$ называются *эрмитовыми*. Для матриц над $\mathbb{R}$ свойство $A^* = A$ означает, что $A^T = A$; такие матрицы называются *симметрическими*.

Пример

Матрицы Паули $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ эрмитовы.

Свойство иметь эрмитову матрицу в ортонормированном базисе характеризует самосопряженные преобразования.

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}: V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе.

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} \qquad \text{скалярное произведение в координатах}$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах} \\ &= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах} \end{aligned}$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах}\\
&= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= [\mathbf{x}]^T A^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{свойство транспонирования}
\end{aligned}$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}: V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах}\\
&= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= [\mathbf{x}]^T A^T\overline{[\mathbf{y}]} && \text{свойство транспонирования}\\
&= [\mathbf{x}]^T\,\overline{A^*[\mathbf{y}]} && \text{свойство комплексного сопряжения + определение } A^*
\end{aligned}
$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах}\\
&= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= [\mathbf{x}]^T A^T\overline{[\mathbf{y}]} && \text{свойство транспонирования}\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A^*[\mathbf{y}]} && \text{свойство комплексного сопряжения + определение } A^*\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A[\mathbf{y}]} && \text{эрмитовость матрицы } A
\end{aligned}$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}: V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах}\\
&= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= [\mathbf{x}]^T A^T\overline{[\mathbf{y}]} && \text{свойство транспонирования}\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A^*[\mathbf{y}]} && \text{свойство комплексного сопряжения + определение } A^*\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A[\mathbf{y}]} && \text{эрмитовость матрицы } A\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{[\mathscr{A}\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}
\end{aligned}
$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A} : V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах}\\
&= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= [\mathbf{x}]^T A^T\overline{[\mathbf{y}]} && \text{свойство транспонирования}\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A^*[\mathbf{y}]} && \text{свойство комплексного сопряжения} + \text{определение } A^*\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A[\mathbf{y}]} && \text{эрмитовость матрицы } A\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{[\mathscr{A}\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y} && \text{скалярное произведение в координатах.}
\end{aligned}
$$

Предложение (матрицы самосопряженных преобразований)

Если линейное преобразование $\mathscr{A}\colon V \to V$ имеет в некотором ортонормированном базисе пространства V эрмитову матрицу, то это преобразование самосопряженное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — произвольные вектора из V. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}]$ их координатные столбцы в выбранном базисе, а через A матрицу преобразования $\mathscr{A}$ в том же базисе. Теперь посчитаем:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} &= [\mathscr{A}\mathbf{x}]^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{скалярное произведение в координатах}\\
&= (A[\mathbf{x}])^T\,\overline{[\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= [\mathbf{x}]^T A^T\overline{[\mathbf{y}]} && \text{свойство транспонирования}\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A^*[\mathbf{y}]} && \text{свойство комплексного сопряжения + определение } A^*\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{A[\mathbf{y}]} && \text{эрмитовость матрицы } A\\
&= [\mathbf{x}]^T\overline{[\mathscr{A}\mathbf{y}]} && \text{действие преобразования в координатах}\\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y} && \text{скалярное произведение в координатах.}
\end{aligned}
$$

Видим, что $\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{A}\mathbf{y}$, что и означает самосопряженность $\mathscr{A}$. $\square$

Примеры самосопряженных преобразований

Теперь легко приводить примеры самосопряженных преобразований. Так, любое преобразование, задаваемое в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей с действительными элементами, будет самосопряженным.

Теперь легко приводить примеры самосопряженных преобразований. Так, любое преобразование, задаваемое в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей с действительными элементами, будет самосопряженным.

В следующем семестре мы докажем, что верно и обратное: *для любого самосопряженного преобразования* $\mathscr{A}$ *конечномерного пространства* V *в* V *найдется ортонормированный базис, в котором матрица преобразования* $\mathscr{A}$ *будет диагональной и действительной.*

Примеры самосопряженных преобразований

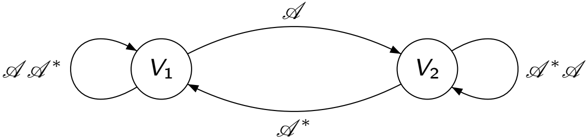
Теперь легко приводить примеры самосопряженных преобразований. Так, любое преобразование, задаваемое в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей с действительными элементами, будет самосопряженным.

В следующем семестре мы докажем, что верно и обратное: *для любого самосопряженного преобразования* $\mathscr{A}$ *конечномерного пространства* V *в* V *найдется ортонормированный базис, в котором матрица преобразования* $\mathscr{A}$ *будет диагональной и действительной.*

Еще один массив полезных примеров дает следующее простое наблюдение:

Замечание (произведение на сопряженное отображение)

Если $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением, то $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$ и $\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ — самосопряженные преобразования.



Теперь легко приводить примеры самосопряженных преобразований. Так, любое преобразование, задаваемое в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей с действительными элементами, будет самосопряженным.

В следующем семестре мы докажем, что верно и обратное: *для любого самосопряженного преобразования $\mathscr{A}$ конечномерного пространства V в V найдется ортонормированный базис, в котором матрица преобразования $\mathscr{A}$ будет диагональной и действительной.*

Еще один массив полезных примеров дает следующее простое наблюдение:

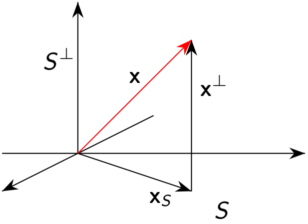
Замечание (произведение на сопряженное отображение)

Если $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением, то $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$ и $\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ — самосопряженные преобразования.

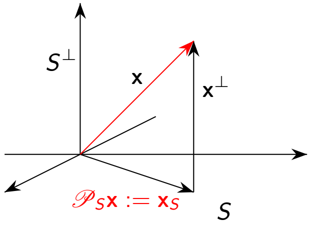
Доказательство. В силу свойств сопряженных отображений имеем

$$(\mathscr{A}\mathscr{A}^*)^* \overset{\nabla 4}{=} (\mathscr{A}^*)^*\mathscr{A}^* \overset{\nabla 1}{=} \mathscr{A}\mathscr{A}^* \quad \text{и} \quad (\mathscr{A}^*\mathscr{A})^* \overset{\nabla 4}{=} \mathscr{A}^*(\mathscr{A}^*)^* \overset{\nabla 1}{=} \mathscr{A}^*\mathscr{A}. \qquad \square$$

Пусть S — подпространство в V. Ортогональному разложению $V = S \oplus S^{\perp}$ соответствует представление произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ в виде суммы ортогональной проекции $\mathbf{x}_S \in S$ и ортогональной составляющей $\mathbf{x}^{\perp} \in S^{\perp}$, см. рисунок:

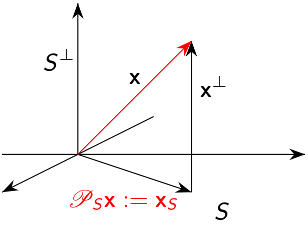


Пусть S — подпространство в V. Ортогональному разложению $V = S \oplus S^{\perp}$ соответствует представление произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ в виде суммы ортогональной проекции $\mathbf{x}_S \in S$ и ортогональной составляющей $\mathbf{x}^{\perp} \in S^{\perp}$, см. рисунок:



Преобразование $\mathscr{P}_S \colon V \to V$, сопоставляющее каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ его ортогональную проекцию $\mathbf{x}_S$, называется *ортогональным проектированием на S* или кратко *ортопроектором*.

Пусть S — подпространство в V. Ортогональному разложению $V = S \oplus S^\perp$ соответствует представление произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ в виде суммы ортогональной проекции $\mathbf{x}_S \in S$ и ортогональной составляющей $\mathbf{x}^\perp \in S^\perp$, см. рисунок:



Преобразование $\mathscr{P}_S \colon V \to V$, сопоставляющее каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ его ортогональную проекцию $\mathbf{x}_S$, называется *ортогональным проектированием на S* или кратко *ортопроектором*.

Предложение (самосопряженность ортопроектора)

Ортогональное проектирование на любое подпространство — самосопряженное преобразование.

Мы дадим два доказательства — операторное и матричное.

Мы дадим два доказательства — операторное и матричное.

Операторное доказательство. Проверим, что для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ верно равенство $\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}$.

Мы дадим два доказательства — операторное и матричное.

Операторное доказательство. Проверим, что для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ верно равенство $\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}$. Представим эти вектора как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}^{\perp}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S + \mathbf{y}^{\perp}$; тогда $\mathscr{P}_S\mathbf{x} = \mathbf{x}_S$ и $\mathscr{P}_S\mathbf{y} = \mathbf{y}_S$.

Мы дадим два доказательства — операторное и матричное.

Операторное доказательство. Проверим, что для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ верно равенство $\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}$. Представим эти вектора как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}^{\perp}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S + \mathbf{y}^{\perp}$; тогда $\mathscr{P}_S\mathbf{x} = \mathbf{x}_S$ и $\mathscr{P}_S\mathbf{y} = \mathbf{y}_S$. Пользуясь этим, подсчитаем

$$\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}_S\left(\mathbf{y}_S + \mathbf{y}^{\perp}\right) = \mathbf{x}_S\mathbf{y}_S = \left(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}^{\perp}\right)\mathbf{y}_S = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}.$$

Мы дадим два доказательства — операторное и матричное.

Операторное доказательство. Проверим, что для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ верно равенство $\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}$. Представим эти вектора как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}^\perp$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S + \mathbf{y}^\perp$; тогда $\mathscr{P}_S\mathbf{x} = \mathbf{x}_S$ и $\mathscr{P}_S\mathbf{y} = \mathbf{y}_S$. Пользуясь этим, подсчитаем

$$\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}_S\left(\mathbf{y}_S + \mathbf{y}^\perp\right) = \mathbf{x}_S\mathbf{y}_S = \left(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}^\perp\right)\mathbf{y}_S = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}.$$

Матричное доказательство. Если $S = \{\mathbf{0}\}$, доказывать нечего. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$, то выберем в S и в $S^\perp$ ортонормированные базисы; их объединение — ортонормированный базис всего пространства V.

Ортопроектор (2)

Мы дадим два доказательства — операторное и матричное.

Операторное доказательство. Проверим, что для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ верно равенство $\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}$. Представим эти вектора как $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}^\perp$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S + \mathbf{y}^\perp$; тогда $\mathscr{P}_S\mathbf{x} = \mathbf{x}_S$ и $\mathscr{P}_S\mathbf{y} = \mathbf{y}_S$. Пользуясь этим, подсчитаем

$$\mathscr{P}_S\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}_S\left(\mathbf{y}_S + \mathbf{y}^\perp\right) = \mathbf{x}_S\mathbf{y}_S = \left(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}^\perp\right)\mathbf{y}_S = \mathbf{x}\mathscr{P}_S\mathbf{y}.$$

Матричное доказательство. Если $S = \{\mathbf{0}\}$, доказывать нечего. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$, то выберем в S и в $S^\perp$ ортонормированные базисы; их объединение — ортонормированный базис всего пространства V. Поскольку $\mathscr{P}_S\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in S$ и $\mathscr{P}_S\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in S^\perp$, в этом базисе преобразование $\mathscr{P}_S$ имеет (очевидно, эрмитову) матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

□