Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

§ 4. Линейные функционалы

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет

Институт естественных наук и математики

кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Пусть V — векторное пространство над произвольным полем F.

Пусть V — векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V — это линейное отображение $g\colon V \to F$.

Пусть V — векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V — это линейное отображение $g\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ — пространство строк длины n над F. Отображение $g\colon V \to F$, определенное правилом $g(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$, является линейным функционалом.

Пусть V — векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V — это линейное отображение $g\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ — пространство строк длины n над F. Отображение $g\colon V \to F$, определенное правилом $g(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V — пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $g\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это — так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пусть V — векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V — это линейное отображение $g\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ — пространство строк длины n над F. Отображение $g\colon V \to F$, определенное правилом $g(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V — пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $g\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это — так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, — линейный функционал.

Пусть V — векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V — это линейное отображение $g\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ — пространство строк длины n над F. Отображение $g\colon V \to F$, определенное правилом $g(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V — пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $g\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это — так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, — линейный функционал.

Пример 4: На любом пространстве V отображение, сопоставляющее каждому вектору из V элемент $0 \in F$, — линейный функционал.

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V.

Пусть V — пространство со скалярным произведением,
$\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{a}$ является линейным функционалом на V.

Пусть V — пространство со скалярным произведением,
$\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V. Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V — конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ — линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V. Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V — конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ — линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения* (см. первый раздел темы): если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*.

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V. Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V — конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi \colon V \to F$ — линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения* (см. первый раздел темы): если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*. Если $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, то в роли $\mathbf{a}$ со свойством $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ годится вектор $\mathbf{0}$.

Пусть V — пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V. Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V — конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ — линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения* (см. первый раздел темы): если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*. Если $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, то в роли $\mathbf{a}$ со свойством $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ годится вектор $\mathbf{0}$. Поэтому будем считать, что Φ принимает не только значение 0.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{b}$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c}) = 0$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ — подпространство размерности $\dim V-1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ — одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b}\in(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta:=\Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a}:=\dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x})=\mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x}\in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x}=\mathbf{c}+\gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c}\in\mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma\in F$. Такое представление возможно, так как $V=\mathrm{Ker}(\Phi)\oplus(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x})=\Phi(\mathbf{c}+\gamma\mathbf{b})=\Phi(\mathbf{c})+\Phi(\gamma\mathbf{b})=\gamma\Phi(\mathbf{b})=\gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c})=0$. С другой стороны,

$$\mathbf{xa}=(\mathbf{c}+\gamma\mathbf{b})\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}=\mathbf{c}\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}+\gamma\mathbf{b}\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}=\gamma\beta,$$

поскольку $\mathbf{cb}=0$. $\square$

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f,g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал, сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$ представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1.

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f, g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал, сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$ представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1. А вот функционал, сопоставляющий многочлену f его свободный член, в виде скалярного произведения представить нельзя; другими словами, нет такого многочлена g, что для любого многочлена f выполняется равенство $\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt = f(0)$. Попробуйте обосновать это утверждение!