

Тема IV. Квадратичные формы

§ 3. Классификация квадратик

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает?

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской кватрикой*.

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской квадрикой*. Итак, поставленный вопрос есть задача классификации плоских квадрик.

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской квадрикой*. Итак, поставленный вопрос есть задача классификации плоских квадрик. Ей занимались еще математики античной Греции (на чисто геометрическом языке и из чисто эстетических соображений).

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской квадрикой*. Итак, поставленный вопрос есть задача классификации плоских квадрик. Ей занимались еще математики античной Греции (на чисто геометрическом языке и из чисто эстетических соображений). Намного позже «вдруг» оказалось, что знания о квадриках необходимы для многочисленных технических и научных приложений.

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской квадрикой*. Итак, поставленный вопрос есть задача классификации плоских квадрик. Ей занимались еще математики античной Греции (на чисто геометрическом языке и из чисто эстетических соображений). Намного позже «вдруг» оказалось, что знания о квадриках необходимы для многочисленных технических и научных приложений.

План:

1. Приведем квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием (в плоском случае ортогональное преобразование есть поворот вокруг начала координат или симметрия относительно одной из координатных осей).

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской квадрикой*. Итак, поставленный вопрос есть задача классификации плоских квадрик. Ей занимались еще математики античной Греции (на чисто геометрическом языке и из чисто эстетических соображений). Намного позже «вдруг» оказалось, что знания о квадриках необходимы для многочисленных технических и научных приложений.

План:

1. Приведем квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием (в плоском случае ортогональное преобразование есть поворот вокруг начала координат или симметрия относительно одной из координатных осей).
2. Избавимся от двух из трех остальных слагаемых с помощью переноса начала координат.

Дано уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (*)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (*), называется *плоской квадрикой*. Итак, поставленный вопрос есть задача классификации плоских квадрик. Ей занимались еще математики античной Греции (на чисто геометрическом языке и из чисто эстетических соображений). Намного позже «вдруг» оказалось, что знания о квадриках необходимы для многочисленных технических и научных приложений.

План:

1. Приведем квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием (в плоском случае ортогональное преобразование есть поворот вокруг начала координат или симметрия относительно одной из координатных осей).
2. Избавимся от двух из трех остальных слагаемых с помощью переноса начала координат.
3. При необходимости исследуем упрощенное уравнение средствами математического анализа.

Плоская квадрика *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Плоская квадрика *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отличны от 0.

Плоская квадрика *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отличны от 0.

Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Плоская квадрика *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отличны от 0.

Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Плоская квадратики *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отличны от 0.

Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от линейных членов.

Плоская квадратика *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отличны от 0.

Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от линейных членов.

Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a'_0 = 0.$$

Плоская квадратика *центральная*, если определитель $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отличны от 0.

Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от линейных членов.

Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a'_0 = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + By''^2 + C = 0.$$

Подслучай 1: $C \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-C/A} + \frac{y''^2}{-C/B} = 1. \quad (1)$$

Возможны три варианта.

Подслучай 1: $C \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-C/A} + \frac{y''^2}{-C/B} = 1. \quad (1)$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} > 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, мы получаем уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллипсом*.

Подслучай 1: $C \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-C/A} + \frac{y''^2}{-C/B} = 1. \quad (1)$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} > 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, мы получаем уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется **эллипсом**.

б) Числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{C}{A} > 0$ и $-\frac{C}{B} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{C}{B}}$, мы получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется **гиперболой**.

Подслучай 1: $C \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-C/A} + \frac{y''^2}{-C/B} = 1. \quad (1)$$

Возможны три варианта.

а) $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} > 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, мы получаем

уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется **эллипсом**.

б) Числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{C}{A} > 0$ и $-\frac{C}{B} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{C}{B}}$, мы получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется **гиперболой**.

в) $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} < 0$. Тогда уравнение (1) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является **пустое множество**. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется **мнимым эллипсом**.

Подслучай 2: $C = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ имеет вид

$$Ax''^2 + By''^2 = 0. \quad (2)$$

Возможны два варианта.

Подслучай 2: $C = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ имеет вид

$$Ax''^2 + By''^2 = 0. \quad (2)$$

Возможны два варианта.

а) Числа A и B имеют одинаковый знак. Тогда уравнение (2) имеет единственное решение: $x'' = y'' = 0$ и его геометрическим образом является *точка*. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *парой мнимых пересекающихся прямых*.

Подслучай 2: $C = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + C = 0$ имеет вид

$$Ax''^2 + By''^2 = 0. \quad (2)$$

Возможны два варианта.

а) Числа A и B имеют одинаковый знак. Тогда уравнение (2) имеет единственное решение: $x'' = y'' = 0$ и его геометрическим образом является *точка*. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *парой мнимых пересекающихся прямых*.

б) Числа A и B имеют разные знаки. Можно считать, что $A > 0$ и $B < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{A}$ и $b = \sqrt{-B}$, получим уравнение $a^2x''^2 - b^2y''^2 = 0$, которое можно переписать в виде $(ax'' + by'')(ax'' - by'') = 0$. Оно задает объединение прямой $ax'' + b''y = 0$ и прямой $ax'' - by'' = 0$. Очевидно, что эти прямые пересекаются. Итак, квадрика, задаваемая таким уравнением, есть *пара пересекающихся прямых*.

Если определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то одно из собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ равно 0, а другое отлично от 0. Пусть λ – собственное значение, отличное от 0.

Случай нецентральной квадррики

Если определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то одно из собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ равно 0, а другое отлично от 0. Пусть λ – собственное значение, отличное от 0. Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda y'^2$.

Если определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то одно из собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ равно 0, а другое отлично от 0. Пусть λ – собственное значение, отличное от 0. Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda y'^2$. Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Если определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то одно из собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ равно 0, а другое отлично от 0. Пусть λ – собственное значение, отличное от 0. Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda y'^2$. Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x''$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda}$, избавимся от члена, содержащего y' .

Если определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то одно из собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ равно 0, а другое отлично от 0. Пусть λ – собственное значение, отличное от 0. Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda y'^2$. Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x''$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda}$, избавимся от члена, содержащего y' . Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda y''^2 + 2a'_1 x'' + a'_0 = 0.$$

Если определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то одно из собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ равно 0, а другое отлично от 0. Пусть λ – собственное значение, отличное от 0. Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda y'^2$. Соответственно, уравнение (*) преобразуется к виду

$$\lambda y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x''$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda}$, избавимся от члена, содержащего y' . Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda y''^2 + 2a'_1 x'' + a'_0 = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0.$$

Подслучай 1: $E \neq 0$. При таком E уравнение $Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$ можно упростить, избавившись от свободного члена с помощью замены $x'' = x''' - \frac{F}{2E}$, $y'' = y'''$.

Подслучай 1: $E \neq 0$. При таком E уравнение $Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$ можно упростить, избавившись от свободного члена с помощью замены $x'' = x''' - \frac{F}{2E}$, $y'' = y'''$. Получится уравнение $Dy'''^2 + 2Ex''' = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *параболой*.

Случай нецентральной квадрики, подслучаи 1 и 2

Подслучай 1: $E \neq 0$. При таком E уравнение $Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$ можно упростить, избавившись от свободного члена с помощью замены $x'' = x''' - \frac{F}{2E}$, $y'' = y'''$. Получится уравнение $Dy'''^2 + 2Ex''' = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *параболой*.

Подслучай 2: $E = 0$. Уравнение можно переписать в виде $y''^2 = -\frac{F}{D}$. Возможны три варианта.

Подслучай 1: $E \neq 0$. При таком E уравнение $Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$ можно упростить, избавившись от свободного члена с помощью замены $x'' = x''' - \frac{F}{2E}$, $y'' = y'''$. Получится уравнение $Dy'''^2 + 2Ex''' = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *параболой*.

Подслучай 2: $E = 0$. Уравнение можно переписать в виде $y''^2 = -\frac{F}{D}$. Возможны три варианта.

а) $-\frac{F}{D} > 0$. Тогда, полагая $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y''^2 = a^2$, геометрическим образом которого является *пара параллельных прямых* $y'' = a$ и $y'' = -a$.

Подслучай 1: $E \neq 0$. При таком E уравнение $Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$ можно упростить, избавившись от свободного члена с помощью замены $x'' = x''' - \frac{F}{2E}$, $y'' = y'''$. Получится уравнение $Dy'''^2 + 2Ex''' = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *параболой*.

Подслучай 2: $E = 0$. Уравнение можно переписать в виде $y''^2 = -\frac{F}{D}$. Возможны три варианта.

а) $-\frac{F}{D} > 0$. Тогда, полагая $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y''^2 = a^2$, геометрическим образом которого является *пара параллельных прямых* $y'' = a$ и $y'' = -a$.

б) $-\frac{F}{D} = 0$. Тогда уравнение имеет вид $y''^2 = 0$ и определяет *пару совпадающих прямых*.

Подслучай 1: $E \neq 0$. При таком E уравнение $Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$ можно упростить, избавившись от свободного члена с помощью замены $x'' = x''' - \frac{F}{2E}$, $y'' = y'''$. Получится уравнение $Dy'''^2 + 2Ex''' = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *параболой*.

Подслучай 2: $E = 0$. Уравнение можно переписать в виде $y''^2 = -\frac{F}{D}$. Возможны три варианта.

а) $-\frac{F}{D} > 0$. Тогда, полагая $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y''^2 = a^2$, геометрическим образом которого является *пара параллельных прямых* $y'' = a$ и $y'' = -a$.

б) $-\frac{F}{D} = 0$. Тогда уравнение имеет вид $y''^2 = 0$ и определяет *пару совпадающих прямых*.

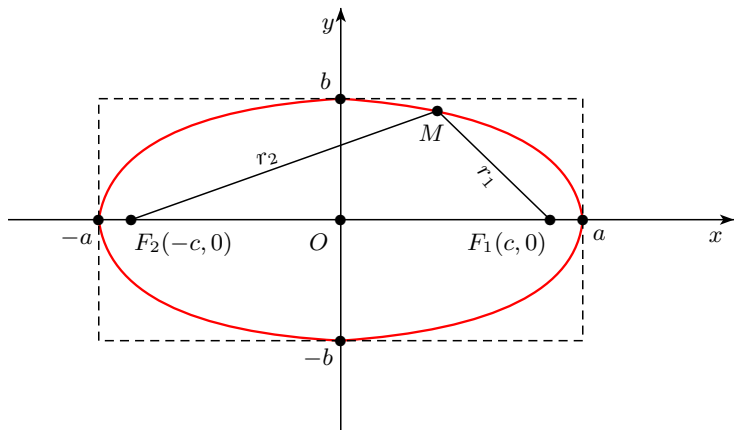
в) $-\frac{F}{D} < 0$. Тогда уравнение $y''^2 = -\frac{F}{D}$ не имеет решений и его геометрическим образом является *пустое множество*. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *парой мнимых параллельных прямых*.

Мы доказали следующий факт:

Теорема (классификация квадрик на плоскости)

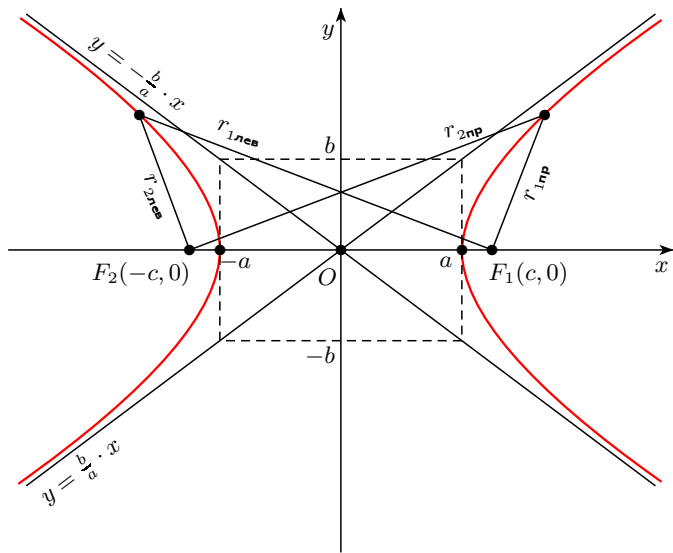
Уравнение второй степени от двух переменных задает одну из 9 квадрик:

- эллипс,*
- гипербола,*
- парабола,*
- мнимый эллипс,*
- пара пересекающихся прямых,*
- пара мнимых пересекающихся прямых,*
- пара параллельных прямых,*
- пара мнимых параллельных прямых,*
- пара совпадающих прямых.*



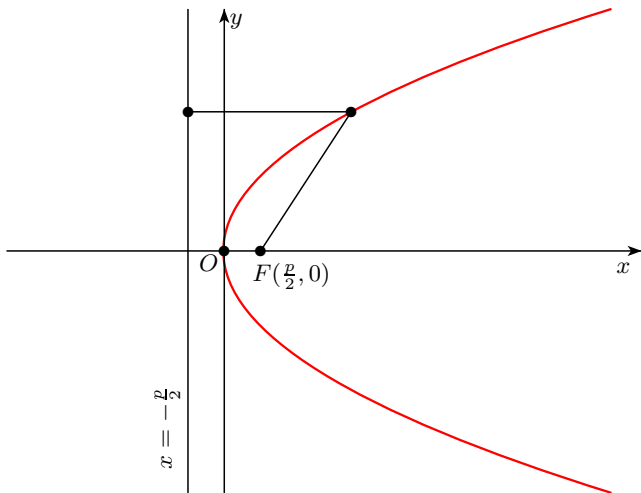
Эллипс с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $a > b$. Здесь $c := \sqrt{a^2 - b^2}$

Гипербола (рисунок)



Гипербола с уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Здесь $c := \sqrt{a^2 + b^2}$

Парабола (рисунок)



Парабола с уравнением $y^2 = 2px$

Теперь рассмотрим уравнение второй степени от трех переменных:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

Теперь рассмотрим уравнение второй степени от трех переменных:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

Какой геометрический объект оно задает?

Теперь рассмотрим уравнение второй степени от трех переменных:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек пространства, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (**), называется *пространственной квадрикой*.

Теперь рассмотрим уравнение второй степени от трех переменных:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

Какой геометрический объект оно задает? Множество точек пространства, задаваемое произвольным уравнением 2-й степени вида (**), называется *пространственной квадрикой*.

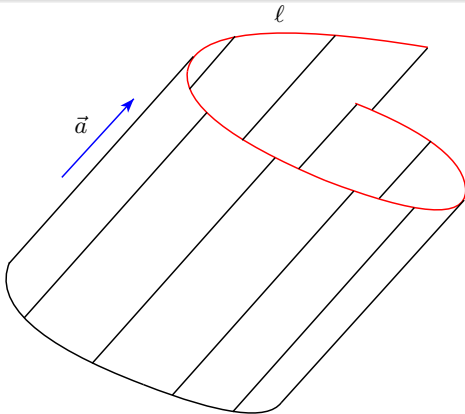
Прежде чем приступить к общей задаче классификации пространственных квадрик, обсудим одну специальную ситуацию.

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и ненулевой вектор \vec{a} . Поверхность, образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки кривой ℓ и коллинеарными вектору \vec{a} , называется *цилиндрической*. Кривая ℓ называется *направляющей*, а прямые — *образующими* этой поверхности.

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и ненулевой вектор \vec{a} . Поверхность, образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки кривой ℓ и коллинеарными вектору \vec{a} , называется *цилиндрической*. Кривая ℓ называется *направляющей*, а прямые — *образующими* этой поверхности.



Теорема (о цилиндрической поверхности)

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Теорема (о цилиндрической поверхности)

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Доказательство. Пусть σ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору \vec{a} . Зафиксируем произвольную точку O и проведем через нее плоскость π , перпендикулярную \vec{a} .

Теорема (о цилиндрической поверхности)

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Доказательство. Пусть σ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору \vec{a} . Зафиксируем произвольную точку O и проведем через нее плоскость π , перпендикулярную \vec{a} . Выберем в π произвольный базис \vec{b} и \vec{c} . Обозначим через ℓ кривую, по которой плоскость π пересекает поверхность σ . Ясно, что плоская кривая ℓ — направляющая поверхности σ .

Теорема (о цилиндрической поверхности)

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Доказательство. Пусть σ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору \vec{a} . Зафиксируем произвольную точку O и проведем через нее плоскость π , перпендикулярную \vec{a} . Выберем в π произвольный базис \vec{b} и \vec{c} . Обозначим через ℓ кривую, по которой плоскость π пересекает поверхность σ . Ясно, что плоская кривая ℓ — направляющая поверхности σ . Она задается в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c})$ плоскости π некоторым уравнением $F(x, y) = 0$. Проверим, что это же уравнение задает σ в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$.

Теорема (о цилиндрической поверхности)

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Доказательство. Пусть σ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору \vec{a} . Зафиксируем произвольную точку O и проведем через нее плоскость π , перпендикулярную \vec{a} . Выберем в π произвольный базис \vec{b} и \vec{c} . Обозначим через ℓ кривую, по которой плоскость π пересекает поверхность σ . Ясно, что плоская кривая ℓ — направляющая поверхности σ . Она задается в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c})$ плоскости π некоторым уравнением $F(x, y) = 0$. Проверим, что это же уравнение задает σ в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка. Проведем через M прямую, коллинеарную \vec{a} , и обозначим через M' точку ее пересечения с π . Точка M' имеет координаты $(x_0, y_0, 0)$. При этом $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $M' \in \ell$, а $M' \in \ell$ тогда и только тогда, когда $F(x_0, y_0) = 0$. Таким образом, точка M принадлежит σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через ℓ пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через ℓ пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Произвольная точка M лежит на σ тогда и только тогда, когда координаты ее проекции на плоскость Oxy (при проектировании вдоль оси Oz) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Отсюда σ – цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ и образующими, коллинеарными вектору \vec{a} . □

Докажем обратное утверждение. Предположим, что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через ℓ пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Произвольная точка M лежит на σ тогда и только тогда, когда координаты ее проекции на плоскость Oxy (при проектировании вдоль оси Oz) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Отсюда σ – цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ и образующими, коллинеарными вектору \vec{a} . □

Возвращаясь к задаче классификации пространственных квадрик, видим, что каждое уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (*)$$

в пространстве задает цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит плоская квадрика, задаваемая (*).

Докажем обратное утверждение. Предположим, что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через ℓ пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Произвольная точка M лежит на σ тогда и только тогда, когда координаты ее проекции на плоскость Oxy (при проектировании вдоль оси Oz) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Отсюда σ – цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ и образующими, коллинеарными вектору \vec{a} . □

Возвращаясь к задаче классификации пространственных квадрик, видим, что каждое уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (*)$$

в пространстве задает цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит плоская квадрика, задаваемая (*). Таким образом, каждой из 9 плоских квадрик отвечает цилиндрическая квадрика в пространстве.

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Мнимый эллипс \mapsto Мнимый эллиптический цилиндр

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Мнимый эллипс \mapsto Мнимый эллиптический цилиндр

Пара пересекающихся прямых \mapsto Пара пересекающихся плоскостей

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Мнимый эллипс \mapsto Мнимый эллиптический цилиндр

Пара пересекающихся прямых \mapsto Пара пересекающихся плоскостей

Пара мнимых пересекающихся прямых \mapsto Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Мнимый эллипс \mapsto Мнимый эллиптический цилиндр

Пара пересекающихся прямых \mapsto Пара пересекающихся плоскостей

Пара мнимых пересекающихся прямых \mapsto Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Пара параллельных прямых \mapsto Пара параллельных плоскостей

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Мнимый эллипс \mapsto Мнимый эллиптический цилиндр

Пара пересекающихся прямых \mapsto Пара пересекающихся плоскостей

Пара мнимых пересекающихся прямых \mapsto Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Пара параллельных прямых \mapsto Пара параллельных плоскостей

Пара мнимых параллельных прямых \mapsto Пара мнимых параллельных плоскостей

Плоская квадрика \mapsto Цилиндрическая квадрика в пространстве

Эллипс \mapsto Эллиптический цилиндр

Гипербола \mapsto Гиперболический цилиндр

Парабола \mapsto Параболический цилиндр

Мнимый эллипс \mapsto Мнимый эллиптический цилиндр

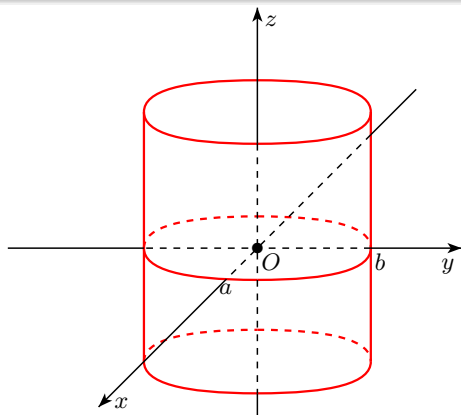
Пара пересекающихся прямых \mapsto Пара пересекающихся плоскостей

Пара мнимых пересекающихся прямых \mapsto Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Пара параллельных прямых \mapsto Пара параллельных плоскостей

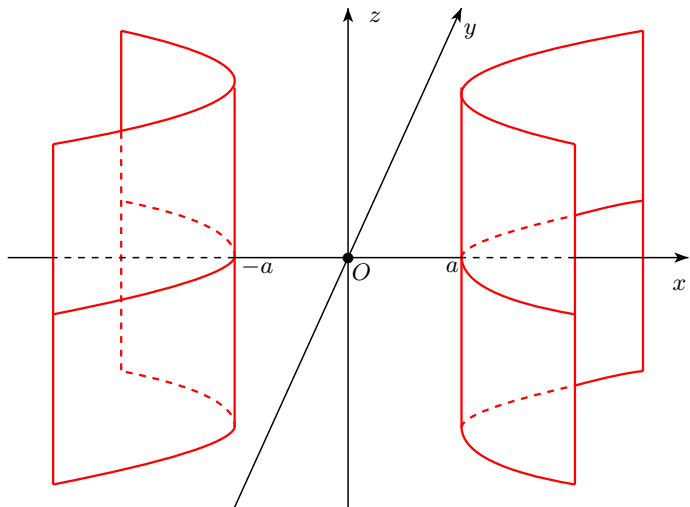
Пара мнимых параллельных прямых \mapsto Пара мнимых параллельных плоскостей

Пара совпадающих прямых \mapsto Пара совпадающих плоскостей

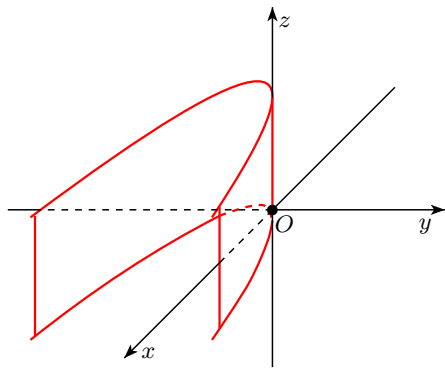


Эллиптический цилиндр

Гиперболический цилиндр



Гиперболический цилиндр



Параболический цилиндр

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

1. Приведем квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

1. Приведем квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

2. Избавимся от трех из четырех остальных слагаемых с помощью еще одного ортогонального преобразования или переноса начала координат.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (**)$$

1. Приведем квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

2. Избавимся от трех из четырех остальных слагаемых с помощью еще одного ортогонального преобразования или переноса начала координат.

3. Исследуем упрощенное уравнение методом сечения.

Пространственная квадрика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Пространственная квадрика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Пространственная квадратики *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$.

Пространственная квадрика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Соответственно, уравнение (**) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Пространственная квадрика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Соответственно, уравнение (**) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, $z' = z'' - \frac{a'_3}{\lambda_3}$, избавимся от линейных членов.

Пространственная квадратика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Соответственно, уравнение (**) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, $z' = z'' - \frac{a'_3}{\lambda_3}$, избавимся от линейных членов. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_0 = 0.$$

Пространственная квадратика *центральная*, если $\Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ не равны 0.

Квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Соответственно, уравнение (**) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, $z' = z'' - \frac{a'_3}{\lambda_3}$, избавимся от линейных членов. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_0 = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0.$$

Подслучай 1: $D \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-D/A} + \frac{y''^2}{-D/B} + \frac{z''^2}{-D/C} = 1. \quad (3)$$

Возможны четыре варианта.

Подслучай 1: $D \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-D/A} + \frac{y''^2}{-D/B} + \frac{z''^2}{-D/C} = 1. \quad (3)$$

Возможны четыре варианта.

а) Числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ положительны. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллипсоидом*.

Подслучай 1: $D \neq 0$. В этом подслучае уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{x''^2}{-D/A} + \frac{y''^2}{-D/B} + \frac{z''^2}{-D/C} = 1. \quad (3)$$

Возможны четыре варианта.

а) Числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ положительны. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллипсоидом*.

б) Среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ два положительны и одно отрицательно.

Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B} > 0$ и $-\frac{D}{C} < 0$.

Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{\frac{D}{C}}$, получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *однополостным гиперboloидом*.

в) Среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ одно положительно и два отрицательны. Можно считать, что первые два отрицательны, а третье положительно.

Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, получим уравнение $-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, что равносильно $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = -1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *двуполостным гиперboloидом*.

- в) Среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ одно положительно и два отрицательны. Можно считать, что первые два отрицательны, а третье положительно. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, получим уравнение $-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, что равносильно $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = -1$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *двуполостным гиперboloидом*.
- г) Числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ отрицательны. Тогда уравнение (3) не имеет решений и его геометрическим образом является пустое множество. Соответствующая квадрика называется *мнимым эллипсоидом*.

Подслучай 2: $D = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ имеет вид

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 0. \quad (4)$$

Возможны два варианта.

Подслучай 2: $D = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ имеет вид

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 0. \quad (4)$$

Возможны два варианта.

а) Числа A , B и C имеют один и тот же знак. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и его геометрическим образом является точка. Соответствующая квадрика называется **мнимым конусом**.

Подслучай 2: $D = 0$. Тогда уравнение $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$ имеет вид

$$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 0. \quad (4)$$

Возможны два варианта.

а) Числа A , B и C имеют один и тот же знак. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и его геометрическим образом является точка. Соответствующая квадрика называется **мнимым конусом**.

б) Числа A , B и C имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, уравнение (4) на -1 , можно добиться того, чтобы среди этих чисел было два положительных и одно отрицательное. Можно считать, что $A, B > 0$ и $C < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{1}{C}}$, мы получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 0$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется **конусом**.

Случай нецентральной квадрики ранга 2

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1.

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое.

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое. Если λ_1, λ_2 – ненулевые собственные значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое. Если λ_1, λ_2 – ненулевые собственные значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое. Если λ_1, λ_2 – ненулевые собственные значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от членов, содержащих x' и y' в первой степени.

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое. Если λ_1, λ_2 – ненулевые собственные значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от членов, содержащих x' и y' в первой степени. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a'_3 z' + a'_0 = 0.$$

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 0, то ранг этой матрицы может быть либо 2, либо 1. Если ранг равен 2, среди собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ два ненулевых, а одно нулевое. Если λ_1, λ_2 – ненулевые собственные значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y' = y'' - \frac{a'_2}{\lambda_2}$, избавимся от членов, содержащих x' и y' в первой степени. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda_1x''^2 + \lambda_2y''^2 + 2a'_3z' + a'_0 = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0.$$

Случай нецентральной квадрики ранга 2, окончание

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0$ сводится к $Ax''^2 + By''^2 + D = 0$, т.е. задает некоторую цилиндрическую квадрику.

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0$ сводится к $Ax''^2 + By''^2 + D = 0$, т.е. задает некоторую цилиндрическую квадрику. Поэтому считаем, что $C \neq 0$, а тогда замена $x'' = x'''$, $y'' = y'''$, $z'' = z''' - \frac{D}{2C}$ избавляет от свободного члена и приводит уравнение к виду

$$Ax'''^2 + By'''^2 + 2Cz''' = 0.$$

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0$ сводится к $Ax''^2 + By''^2 + D = 0$, т.е. задает некоторую цилиндрическую квадрику. Поэтому считаем, что $C \neq 0$, а тогда замена $x'' = x'''$, $y'' = y'''$, $z'' = z''' - \frac{D}{2C}$ избавляет от свободного члена и приводит уравнение к виду

$$Ax'''^2 + By'''^2 + 2Cz''' = 0.$$

Возможны два варианта.

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0$ сводится к $Ax''^2 + By''^2 + D = 0$, т.е. задает некоторую цилиндрическую квадратку. Поэтому считаем, что $C \neq 0$, а тогда замена $x'' = x'''$, $y'' = y'''$, $z'' = z''' - \frac{D}{2C}$ избавляет от свободного члена и приводит уравнение к виду

$$Ax'''^2 + By'''^2 + 2Cz''' = 0.$$

Возможны два варианта.

а) Числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют одинаковый знак. Можно считать, что они положительны. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, получим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2} + \frac{y'''^2}{b^2} = 2z$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллиптическим параболоидом*.

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + By''^2 + 2Cz'' + D = 0$ сводится к $Ax''^2 + By''^2 + D = 0$, т.е. задает некоторую цилиндрическую квадратку. Поэтому считаем, что $C \neq 0$, а тогда замена $x'' = x'''$, $y'' = y'''$, $z'' = z''' - \frac{D}{2C}$ избавляет от свободного члена и приводит уравнение к виду

$$Ax'''^2 + By'''^2 + 2Cz''' = 0.$$

Возможны два варианта.

- а) Числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют одинаковый знак. Можно считать, что они положительны. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, получим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2} + \frac{y'''^2}{b^2} = 2z$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *эллиптическим параболоидом*.
- б) Числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{C}{A} > 0$ и $-\frac{C}{B} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{C}{B}}$, получим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 2z$. Квадрика, задаваемая таким уравнением, называется *гиперболическим параболоидом*.

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равно 0.

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равно 0. Если λ – ненулевое собственное значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda x'^2$.

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равно 0. Если λ – ненулевое собственное значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda x'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda x'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_0 = 0.$$

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равно 0. Если λ – ненулевое собственное значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda x'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda x'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, избавимся от x' в первой степени.

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равно 0. Если λ – ненулевое собственное значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda x'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda x'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, избавимся от x' в первой степени. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda x''^2 + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a'_0 = 0.$$

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ равен 1, то одно из ее собственных значений ненулевое, а два равно 0. Если λ – ненулевое собственное значения, то квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду $\lambda x'^2$. Соответственно, уравнение (***) преобразуется к виду

$$\lambda x'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_0 = 0.$$

Заменяя $x' = x'' - \frac{a'_1}{\lambda_1}$, избавимся от x' в первой степени. Упрощенное уравнение имеет вид

$$\lambda x''^2 + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a'_0 = 0.$$

Переобозначив коэффициенты, запишем его как

$$Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0.$$

Случай нецентральной квадрики ранга 1, окончание

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ задает некоторую цилиндрическую квадрику.

Случай нецентральной квадрики ранга 1, окончание

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ задает некоторую цилиндрическую квадратку. Если же $C \neq 0$, выполним ортогональное

преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} & -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix}$. Подсчитаем,

во что перейдет линейная форма $By'' + Cz''$ при таком преобразовании:

$$By'' + Cz'' = B \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' - \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) + \\ + C \left(\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' + \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right)$$

Случай нецентральной квадрики ранга 1, окончание

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ задает некоторую цилиндрическую квадратку. Если же $C \neq 0$, выполним ортогональное

преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} & -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix}$. Подсчитаем,

во что перейдет линейная форма $By'' + Cz''$ при таком преобразовании:

$$\begin{aligned} By'' + Cz'' &= B \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' - \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) + \\ &+ C \left(\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' + \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) = \sqrt{B^2+C^2} y'''. \end{aligned}$$

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ задает некоторую цилиндрическую квадратку. Если же $C \neq 0$, выполним ортогональное

преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} & -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix}$. Подсчитаем,

во что перейдет линейная форма $By'' + Cz''$ при таком преобразовании:

$$By'' + Cz'' = B \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' - \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) + \\ + C \left(\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' + \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) = \sqrt{B^2+C^2} y''''.$$

Видим, что уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ преобразуется в $Ax''^2 + \sqrt{B^2+C^2}y'''' + D = 0$.

Если $C = 0$, уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ задает некоторую цилиндрическую квадратку. Если же $C \neq 0$, выполним ортогональное

преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} & -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix}$. Подсчитаем,

во что перейдет линейная форма $By'' + Cz''$ при таком преобразовании:

$$By'' + Cz'' = B \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' - \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) + \\ + C \left(\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} y''' + \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} z''' \right) = \sqrt{B^2+C^2} y''''.$$

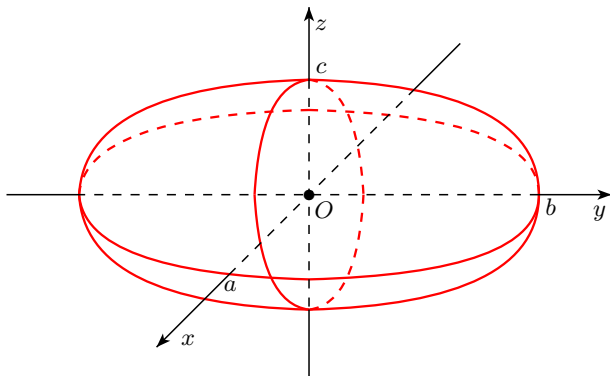
Видим, что уравнение $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$ преобразуется в $Ax''^2 + \sqrt{B^2+C^2}y'''' + D = 0$. Значит, и при $C \neq 0$ оно задает некоторую цилиндрическую квадратку.

Мы доказали следующий факт:

Теорема (классификация квадрик в пространстве)

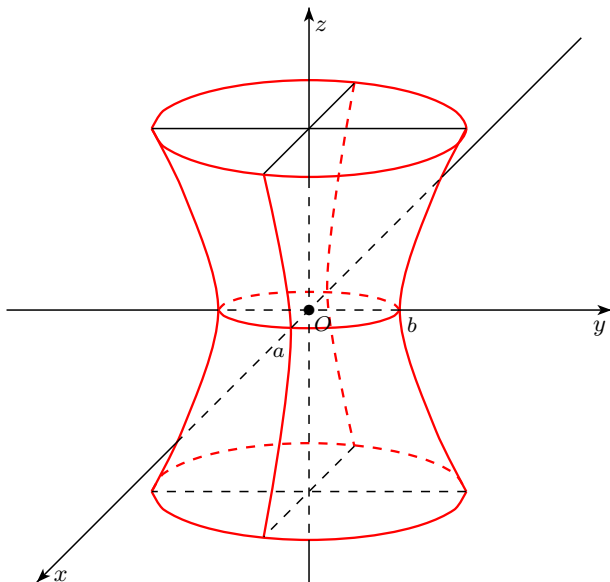
Уравнение второй степени от трех переменных задает одну из 17 квадрик:

- одну из 9 цилиндрических квадрик*
- эллипсоид,*
- мнимый эллипсоид,*
- однополостный гиперболоид,*
- двуполостный гиперболоид,*
- конус,*
- мнимый конус,*
- эллиптический параболоид,*
- гиперболический параболоид.*



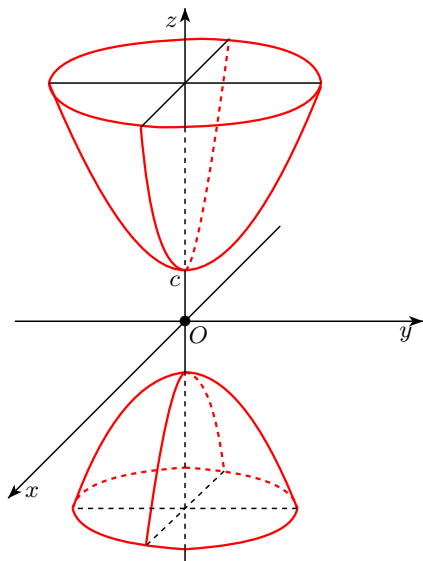
Эллипсоид

Однополостный гиперболоид (рисунок)



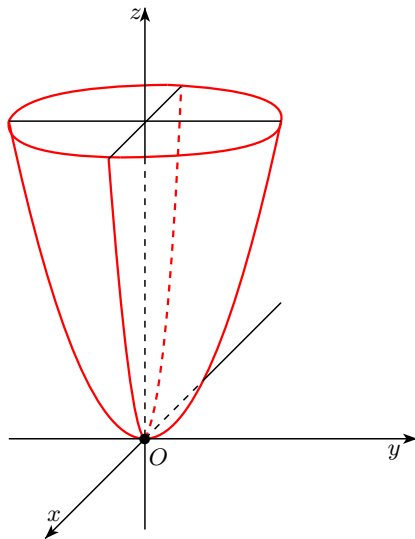
Однополостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид (рисунок)



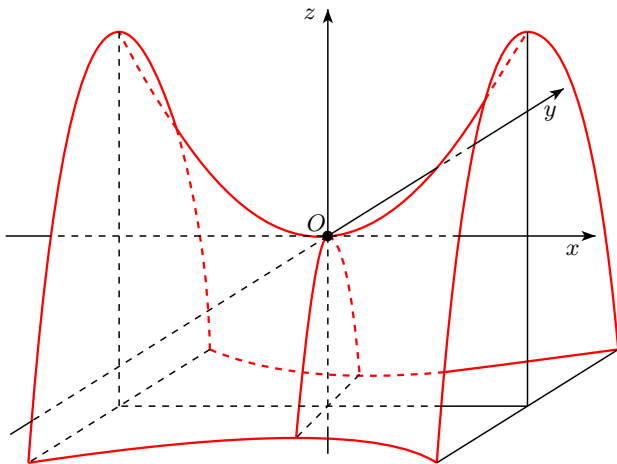
Двуполостный гиперболоид

Эллиптический параболоид (рисунок)



Эллиптический параболоид

Гиперболический параболоид (рисунок)



Гиперболический параболоид