# Тема III. Линейные операторы

# § 7. Корневые подпространства

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.

## Инвариантные подпространства

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.
Мы хотим найти базис пространства $V$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ устроена как можно проще и действие оператора $\mathcal{A}$ наиболее понятно.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.
Мы хотим найти базис пространства $V$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ устроена как можно проще и действие оператора $\mathcal{A}$ наиболее понятно.
Если поле $F$ произвольно, то скалярного произведения на $V$, вообще говоря, нет, и построения из предыдущих лекций, увы, неприменимы.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.
Мы хотим найти базис пространства $V$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ устроена как можно проще и действие оператора $\mathcal{A}$ наиболее понятно.
Если поле $F$ произвольно, то скалярного произведения на $V$, вообще говоря, нет, и построения из предыдущих лекций, увы, неприменимы.
Вспомним идеи, связанные с инвариантными подпространствами.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.
Мы хотим найти базис пространства $V$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ устроена как можно проще и действие оператора $\mathcal{A}$ наиболее понятно.
Если поле $F$ произвольно, то скалярного произведения на $V$, вообще говоря, нет, и построения из предыдущих лекций, увы, неприменимы.
Вспомним идеи, связанные с инвариантными подпространствами.

**Определение**

Пусть $V$ – векторное пространство, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно* $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}$-*инвариантным*, если $\mathcal{A}\mathbf{x} \in S$ для любого $\mathbf{x} \in S$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.
Мы хотим найти базис пространства $V$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ устроена как можно проще и действие оператора $\mathcal{A}$ наиболее понятно.
Если поле $F$ произвольно, то скалярного произведения на $V$, вообще говоря, нет, и построения из предыдущих лекций, увы, неприменимы.
Вспомним идеи, связанные с инвариантными подпространствами.

**Определение**

Пусть $V$ – векторное пространство, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно* $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}$-*инвариантным*, если $\mathcal{A}\mathbf{x} \in S$ для любого $\mathbf{x} \in S$.

Мы знаем, что если пространство $V$ является *прямой суммой* ненулевых $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств $S_1, \dots, S_t$, то в базисе пространства $V$, полученном объединением базисов подпространств $S_1, \dots, S_t$, матрица оператора $\mathcal{A}$ будет блочно-диагональной, причем $i$-й диагональный блок будет матрицей ограничения $\mathcal{A}$ на подпространство $S_i$ в выбранном в этом подпространстве базисе.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.
Мы хотим найти базис пространства $V$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ устроена как можно проще и действие оператора $\mathcal{A}$ наиболее понятно.
Если поле $F$ произвольно, то скалярного произведения на $V$, вообще говоря, нет, и построения из предыдущих лекций, увы, неприменимы.
Вспомним идеи, связанные с инвариантными подпространствами.

**Определение**

Пусть $V$ – векторное пространство, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно* $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}$-*инвариантным*, если $\mathcal{A}\mathbf{x} \in S$ для любого $\mathbf{x} \in S$.

Мы знаем, что если пространство $V$ является *прямой суммой* ненулевых $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств $S_1, \ldots, S_t$, то в базисе пространства $V$, полученном объединением базисов подпространств $S_1, \ldots, S_t$, матрица оператора $\mathcal{A}$ будет блочно-диагональной, причем $i$-й диагональный блок будет матрицей ограничения $\mathcal{A}$ на подпространство $S_i$ в выбранном в этом подпространстве базисе. Но где взять такие подпространства?

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \ldots$$

$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \ldots$$

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$
$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ и образ $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^k \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}^k \supseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$

$$V \supseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \supseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}^s = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^{s+1}$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$

$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Индукцией по $k$ покажем, что тогда имеет место $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$ для любого натурального $k$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \ldots$$
$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \ldots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Индукцией по $k$ покажем, что тогда имеет место $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$ для любого натурального $k$. База очевидна. Шаг: $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k-1})$

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$
$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Индукцией по $k$ покажем, что тогда имеет место $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$ для любого натурального $k$. База очевидна. Шаг: $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k-1}) = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^s) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$
$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Индукцией по $k$ покажем, что тогда имеет место $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$ для любого натурального $k$. База очевидна. Шаг: $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k-1}) = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^s) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$.

По теореме о сумме ранга и дефекта $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$
$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Индукцией по $k$ покажем, что тогда имеет место $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$ для любого натурального $k$. База очевидна. Шаг: $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k-1}) = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^s) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$.

По теореме о сумме ранга и дефекта $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$. Поэтому обе цепочки стабилизируются одновременно.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ будут $\mathcal{A}$-инвариантными подпространствами. Однако для «типичного» оператора $\mathcal{A}$ эти подпространства имеют ненулевое пересечение, и потому разложить пространство $V$ в их прямую сумму не получится.

Так как $\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$, имеем $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального $k$. Кроме того, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Получаем две цепочки подпространств – растущую и убывающую:

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s \subseteq \dots$$

$$V \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s \supseteq \dots$$

Так как $\dim V < \infty$, в обеих цепочках возникнут равные подпространства. Пусть $s$ таково, что $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Индукцией по $k$ покажем, что тогда имеет место $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$ для любого натурального $k$. База очевидна. Шаг: $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+k-1}) = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^s) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$.

По теореме о сумме ранга и дефекта $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$. Поэтому обе цепочки стабилизируются одновременно.

Заметим еще, что все подпространства в обеих цепочках $\mathcal{A}$-инвариантны.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \operatorname{Im} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*.

# Разложение Фиттинга

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \operatorname{Im} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \operatorname{Im} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^s + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ равносильно равенству $U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{0}\}$.

# Разложение Фиттинга

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ равносильно равенству $U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем вектор $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}}$.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \operatorname{Im} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^s + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ равносильно равенству $U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем вектор $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}}$. Раз $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} = \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y}$.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на 1-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на 0-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ равносильно равенству $U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем вектор $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}}$. Раз $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y}$. Раз $\mathbf{x} \in N_{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{0} = \mathcal{A}^s\mathbf{x} = \mathcal{A}^{2s}\mathbf{y}$.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ равносильно равенству $U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем вектор $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}}$. Раз $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y}$. Раз $\mathbf{x} \in N_{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{0} = \mathcal{A}^s\mathbf{x} = \mathcal{A}^{2s}\mathbf{y}$. Отсюда $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{2s} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, а значит, $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Положим $U_\mathcal{A} := \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, $N_\mathcal{A} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \operatorname{Im} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_\mathcal{A}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_\mathcal{A}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_\mathcal{A} \oplus N_\mathcal{A}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_\mathcal{A}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_\mathcal{A}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^s + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_\mathcal{A} \oplus N_\mathcal{A}$ равносильно равенству $U_\mathcal{A} \cap N_\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем вектор $\mathbf{x} \in U_\mathcal{A} \cap N_\mathcal{A}$. Раз $\mathbf{x} \in U_\mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y}$. Раз $\mathbf{x} \in N_\mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{0} = \mathcal{A}^s\mathbf{x} = \mathcal{A}^{2s}\mathbf{y}$. Отсюда $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{2s} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s$, а значит, $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

По определению 0-компоненты ограничение $\mathcal{A}^s$ на нее – нулевой оператор, т.е. ограничение $\mathcal{A}$ на нее – нильпотентный оператор.

Положим $U_{\mathcal{A}} := \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, $N_{\mathcal{A}} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, где $s$ – наименьшее со свойством $\operatorname{Im}\mathcal{A}^s = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Как отмечено, тогда и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \dots$. Инвариантное подпространство $U_{\mathcal{A}}$ называется *1-компонентой* оператора $\mathcal{A}$, а инвариантное подпространство $N_{\mathcal{A}}$ – его *0-компонентой*. Оператор, некоторая степень которого – нулевой оператор, называют *нильпотентным*.

**Предложение (лемма Фиттинга)**

*$V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$. При этом ограничение $\mathcal{A}$ на $1$-компоненту $U_{\mathcal{A}}$ – невырожденный оператор, а ограничение $\mathcal{A}$ на $0$-компоненту $N_{\mathcal{A}}$ – нильпотентный оператор.*

*Доказательство.* Поскольку $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^s + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \dim V$, равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ равносильно равенству $U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{0}\}$. Возьмем вектор $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} \cap N_{\mathcal{A}}$. Раз $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y}$. Раз $\mathbf{x} \in N_{\mathcal{A}} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, имеем $\mathbf{0} = \mathcal{A}^s\mathbf{x} = \mathcal{A}^{2s}\mathbf{y}$. Отсюда $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{2s} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s$, а значит, $\mathbf{x} = \mathcal{A}^s\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

По определению 0-компоненты ограничение $\mathcal{A}^s$ на нее – нулевой оператор, т.е. ограничение $\mathcal{A}$ на нее – нильпотентный оператор. Из того, что $U_{\mathcal{A}} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}^s = \{\mathbf{0}\}$, следует, что ограничение $\mathcal{A}^s$ на 1-компоненту невырождено, но тогда невырождено и ограничение $\mathcal{A}$ на нее. $\square$

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$.
Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$.
Отметим, что у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ одинаковые инвариантные подпространства.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Отметим, что у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ одинаковые инвариантные подпространства.

**Определение**

*Корневым подпространством* линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению $\alpha$, называется $0$-компонента $N_{\mathcal{A}_\alpha}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Отметим, что у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ одинаковые инвариантные подпространства.

**Определение**

*Корневым подпространством* линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению $\alpha$, называется $0$-компонента $N_{\mathcal{A}_\alpha}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$.

Более подробно, корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\alpha$, – это $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, где $s$ – наименьшее число со свойством $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{s+1} = \ldots$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Отметим, что у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ одинаковые инвариантные подпространства.

## Определение

*Корневым подпространством* линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению $\alpha$, называется $0$-компонента $N_{\mathcal{A}_\alpha}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$.

Более подробно, корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\alpha$, – это $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, где $s$ – наименьшее число со свойством $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{s+1} = \dots$. Число $s$ называют *высотой* корневого подпространства $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, а его ненулевые вектора – *корневыми векторами, принадлежащими собственному значению* $\alpha$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Отметим, что у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ одинаковые инвариантные подпространства.

**Определение**

*Корневым подпространством* линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению $\alpha$, называется $0$-компонента $N_{\mathcal{A}_\alpha}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$.

Более подробно, корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\alpha$, – это $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, где $s$ – наименьшее число со свойством $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{s+1} = \dots$. Число $s$ называют *высотой* корневого подпространства $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, а его ненулевые вектора – *корневыми векторами, принадлежащими собственному значению* $\alpha$.

Отметим, что собственные вектора оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие $\alpha$, являются корневыми – ведь собственные вектора лежат в $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})$.

Пусть $V$ – линейное пространство над произвольным полем $F$, $\dim V < \infty$, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Предполагаем, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ лежат в $F$, – этого можно добиться, расширив $F$ до поля разложения характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственное значение $\alpha$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Отметим, что у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ одинаковые инвариантные подпространства.

**Определение**

*Корневым подпространством* линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению $\alpha$, называется $0$-компонента $N_{\mathcal{A}_\alpha}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$.

Более подробно, корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\alpha$, – это $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, где $s$ – наименьшее число со свойством $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{s+1} = \dots$. Число $s$ называют *высотой* корневого подпространства $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^s$, а его ненулевые вектора – *корневыми векторами, принадлежащими собственному значению* $\alpha$.

Отметим, что собственные вектора оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие $\alpha$, являются корневыми – ведь собственные вектора лежат в $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})$. Итак, корневые вектора – обобщение собственных.

# Корневые подпространства (2)

Зачем нужны корневые вектора?

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень 0 кратности 3.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень 0 кратности 3. Собственные вектора оператора $\mathcal{D}$, принадлежащие 0, суть ненулевые константы, поэтому у $\mathcal{D}$ нет базиса из собственных векторов.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень 0 кратности 3. Собственные вектора оператора $\mathcal{D}$, принадлежащие 0, суть ненулевые константы, поэтому у $\mathcal{D}$ нет базиса из собственных векторов. Отметим, что *базис из корневых векторов* у $\mathcal{D}$ *есть*: многочлены $1, x, x^2$ – корневые вектора.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень 0 кратности 3. Собственные вектора оператора $\mathcal{D}$, принадлежащие 0, суть ненулевые константы, поэтому у $\mathcal{D}$ нет базиса из собственных векторов. Отметим, что *базис из корневых векторов* у $\mathcal{D}$ *есть*: многочлены $1, x, x^2$ – корневые вектора.

Мы докажем, что базис из корневых векторов есть у любого линейного оператора, собственные значения которого лежат в поле скаляров.

Зачем нужны корневые вектора? Вспомним, чем хороши собственные вектора: матрица оператора в базисе из собственных векторов диагональна, причем по диагонали стоят собственные значения. Однако базис из собственных векторов есть далеко не у всех операторов.

*Пример.* Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень 0 кратности 3. Собственные вектора оператора $\mathcal{D}$, принадлежащие 0, суть ненулевые константы, поэтому у $\mathcal{D}$ нет базиса из собственных векторов. Отметим, что *базис из корневых векторов* у $\mathcal{D}$ *есть*: многочлены $1, x, x^2$ – корневые вектора.

Мы докажем, что базис из корневых векторов есть у любого линейного оператора, собственные значения которого лежат в поле скаляров. После этого надо будет еще разобраться, как устроена матрица оператора в базисе из корневых векторов, но это тема следующей лекции.

# Корневое разложение

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений.

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

**Теорема (корневое разложение)**

*Если $V$ – линейное пространство над полем $F$, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A} \subseteq F$, то $V$ – прямая сумма всех корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$.*

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

**Теорема (корневое разложение)**

*Если $V$ – линейное пространство над полем $F$, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A} \subseteq F$, то $V$ – прямая сумма всех корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$. Размерность корневого подпространства, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равна кратности корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.*

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

**Теорема (корневое разложение)**

*Если $V$ – линейное пространство над полем $F$, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A} \subseteq F$, то $V$ – прямая сумма всех корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$. Размерность корневого подпространства, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равна кратности корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.*

Если корневое подпространство, отвечающее $\alpha$, обозначить через $V_\alpha$, корневое разложение запишется так:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}} V_\alpha.$$

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

**Теорема (корневое разложение)**

*Если $V$ – линейное пространство над полем $F$, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A} \subseteq F$, то $V$ – прямая сумма всех корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$. Размерность корневого подпространства, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равна кратности корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.*

Если корневое подпространство, отвечающее $\alpha$, обозначить через $V_\alpha$, корневое разложение запишется так:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}} V_\alpha.$$

*Доказательство.* Индукция по $\dim V$. База $\dim V = 1$ очевидна.

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

**Теорема (корневое разложение)**

*Если $V$ – линейное пространство над полем $F$, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A} \subseteq F$, то $V$ – прямая сумма всех корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$. Размерность корневого подпространства, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равна кратности корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.*

Если корневое подпространство, отвечающее $\alpha$, обозначить через $V_\alpha$, корневое разложение запишется так:

$$V = \bigoplus_{\alpha\in\operatorname{Spec}\mathcal{A}} V_\alpha.$$

*Доказательство.* Индукция по $\dim V$. База $\dim V = 1$ очевидна.

Пусть $\dim V > 1$. Возьмем $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$ и запишем для оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ разложение Фиттинга: $V = U_{\mathcal{A}_\alpha} \oplus N_{\mathcal{A}_\alpha}$

*Спектр* оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех его собственных значений. Спектр оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

**Теорема (корневое разложение)**

*Если $V$ – линейное пространство над полем $F$, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A} \subseteq F$, то $V$ – прямая сумма всех корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$. Размерность корневого подпространства, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равна кратности корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.*

Если корневое подпространство, отвечающее $\alpha$, обозначить через $V_\alpha$, корневое разложение запишется так:

$$V = \bigoplus_{\alpha\in\operatorname{Spec}\mathcal{A}} V_\alpha.$$

*Доказательство.* Индукция по $\dim V$. База $\dim V = 1$ очевидна.

Пусть $\dim V > 1$. Возьмем $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$ и запишем для оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ разложение Фиттинга: $V = U_{\mathcal{A}_\alpha} \oplus N_{\mathcal{A}_\alpha} = U_{\mathcal{A}_\alpha} \oplus V_\alpha$.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров.

# Корневое разложение (2)

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix}$$

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

# Корневое разложение (2)

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}$$

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\beta - \alpha)\mathbf{x}.$$

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\beta - \alpha)\mathbf{x}.$$

Отсюда $\mathcal{A}_\alpha^2 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^2 \mathbf{x}$, $\mathcal{A}_\alpha^3 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^3 \mathbf{x}$, и т.д.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\beta - \alpha)\mathbf{x}.$$

Отсюда $\mathcal{A}_\alpha^2 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^2 \mathbf{x}$, $\mathcal{A}_\alpha^3 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^3 \mathbf{x}$, и т.д. Если $s$ – высота корневого подпространства $V_\alpha$, то $\mathcal{A}_\alpha^s \mathbf{x} = \mathbf{0}$, так как $V_\alpha = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_\alpha^s$. Отсюда $(\beta - \alpha)^s \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\beta - \alpha)\mathbf{x}.$$

Отсюда $\mathcal{A}_\alpha^2 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^2 \mathbf{x}$, $\mathcal{A}_\alpha^3 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^3 \mathbf{x}$, и т.д. Если $s$ – высота корневого подпространства $V_\alpha$, то $\mathcal{A}_\alpha^s \mathbf{x} = \mathbf{0}$, так как $V_\alpha = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_\alpha^s$. Отсюда $(\beta - \alpha)^s \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, заключаем, что $(\beta - \alpha)^s = 0$, т.е. $\beta = \alpha$.

Составим базис пространства $V$ из базисов прямых слагаемых $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$. Поскольку подпространства $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, где $B$ и $C$ – матрицы ограничений $\mathcal{A}$ на $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $V_\alpha$ в базисах этих подпространств, а через $O$ обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Тогда характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов матриц $B$ и $C$:

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} B - \lambda E & O \\ O & C - \lambda E \end{vmatrix} = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|.$$

Пусть $\beta$ – корень многочлена $|C - \lambda E|$. Возьмем в подпространстве $V_\alpha$ собственный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий $\beta$. Применим к $\mathbf{x}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\beta - \alpha)\mathbf{x}.$$

Отсюда $\mathcal{A}_\alpha^2 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^2 \mathbf{x}$, $\mathcal{A}_\alpha^3 \mathbf{x} = (\beta - \alpha)^3 \mathbf{x}$, и т.д. Если $s$ – высота корневого подпространства $V_\alpha$, то $\mathcal{A}_\alpha^s \mathbf{x} = \mathbf{0}$, так как $V_\alpha = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_\alpha^s$. Отсюда $(\beta - \alpha)^s \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$, заключаем, что $(\beta - \alpha)^s = 0$, т.е. $\beta = \alpha$. Раз все корни многочлена $|C - \lambda E|$ равны $\alpha$, то $|C - \lambda E| = (-1)^k (\lambda - \alpha)^k$, где $k$ – размер матрицы $C$, т.е. $\dim V_\alpha$.

Множитель $|B - \lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$.

Множитель $|B - \lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Ограничение $\mathcal{A}_\alpha$ на свою 1-компоненту невырождено, т.е. $\mathcal{A}_\alpha\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ для ненулевых $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$.

Множитель $|B - \lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Ограничение $\mathcal{A}_\alpha$ на свою 1-компоненту невырождено, т.е. $\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ для ненулевых $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$. Это значит, что $\mathcal{A}\mathbf{x} \neq \alpha\mathbf{x}$, если $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, т.е. подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ не содержит собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих $\alpha$.

Множитель $|B-\lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda)=|B-\lambda E|\cdot|C-\lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha=\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}$. Ограничение $\mathcal{A}_\alpha$ на свою 1-компоненту невырождено, т.е. $\mathcal{A}_\alpha\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ для ненулевых $\mathbf{x}\in U_{\mathcal{A}_\alpha}$. Это значит, что $\mathcal{A}\mathbf{x}\neq\alpha\mathbf{x}$, если $\mathbf{x}\in U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, т.е. подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ не содержит собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих $\alpha$. Поэтому $\alpha$ не является корнем многочлена $|B-\lambda E|$.

Множитель $|B-\lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda)=|B-\lambda E|\cdot|C-\lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha=\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}$. Ограничение $\mathcal{A}_\alpha$ на свою 1-компоненту невырождено, т.е. $\mathcal{A}_\alpha\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ для ненулевых $\mathbf{x}\in U_{\mathcal{A}_\alpha}$. Это значит, что $\mathcal{A}\mathbf{x}\neq\alpha\mathbf{x}$, если $\mathbf{x}\in U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, т.е. подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ не содержит собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих $\alpha$. Поэтому $\alpha$ не является корнем многочлена $|B-\lambda E|$. Из равенства $f_{\mathcal{A}}(\lambda)=|B-\lambda E|\cdot|C-\lambda E|=|B-\lambda E|\cdot(-1)^k(\lambda-\alpha)^k$ заключаем, что $k=\dim V_\alpha$ есть кратность корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.

Множитель $|B - \lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Ограничение $\mathcal{A}_\alpha$ на свою 1-компоненту невырождено, т.е. $\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ для ненулевых $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$. Это значит, что $\mathcal{A}\mathbf{x} \neq \alpha\mathbf{x}$, если $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, т.е. подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ не содержит собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих $\alpha$. Поэтому $\alpha$ не является корнем многочлена $|B - \lambda E|$. Из равенства $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E| = |B - \lambda E| \cdot (-1)^k (\lambda - \alpha)^k$ заключаем, что $k = \dim V_\alpha$ есть кратность корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.

Для завершения доказательства остается применить предположение индукции к ограничению оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, размерность которого меньше размерности $V$. □

Множитель $|B - \lambda E|$ в разложении $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E|$ – это характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, т.е. на 1-компоненту оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$. Ограничение $\mathcal{A}_\alpha$ на свою 1-компоненту невырождено, т.е. $\mathcal{A}_\alpha \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ для ненулевых $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$. Это значит, что $\mathcal{A}\mathbf{x} \neq \alpha\mathbf{x}$, если $\mathbf{x} \in U_{\mathcal{A}_\alpha}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, т.е. подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$ не содержит собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих $\alpha$. Поэтому $\alpha$ не является корнем многочлена $|B - \lambda E|$. Из равенства $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |B - \lambda E| \cdot |C - \lambda E| = |B - \lambda E| \cdot (-1)^k(\lambda - \alpha)^k$ заключаем, что $k = \dim V_\alpha$ есть кратность корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$.

Для завершения доказательства остается применить предположение индукции к ограничению оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $U_{\mathcal{A}_\alpha}$, размерность которого меньше размерности $V$. □

Отметим, что теорема о корневом разложении сводит задачу об устройстве «простейшей» матрицы произвольного линейного оператора к случаю нильпотентных операторов.

**Следствие (Камилл Жордан, 1870)**

*Если $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, то в $V$ можно выбрать базис из его корневых векторов.*

**Следствие (Камилл Жордан, 1870)**

*Если $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, то в $V$ можно выбрать базис из его корневых векторов. В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна.*

**Следствие (Камилл Жордан, 1870)**

*Если* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– такой линейный оператор, что* $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ *содержится в поле скаляров, то в* $V$ *можно выбрать базис из его корневых векторов. В этом базисе матрица оператора* $\mathcal{A}$ *блочно-диагональна.*
*Число диагональных блоков равно* $|\operatorname{Spec}\mathcal{A}|$, *размер блока, отвечающего* $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, *равен кратности* $k$ *корня* $\alpha$ *в характеристическом многочлене оператора* $\mathcal{A}$, *а блок равен* $\alpha E_k + A_\alpha$, *где* $A_\alpha$ *есть матрица ограничения оператора* $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ *на его* $0$*-компоненту.*

# Матричное следствие

### Следствие (Камилл Жордан, 1870)

*Если $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, то в $V$ можно выбрать базис из его корневых векторов. В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна.*
*Число диагональных блоков равно $|\operatorname{Spec}\mathcal{A}|$, размер блока, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равен кратности $k$ корня $\alpha$ в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$, а блок равен $\alpha E_k + A_\alpha$, где $A_\alpha$ есть матрица ограничения оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ на его $0$-компоненту.*

Если $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ и

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = \pm(\lambda - \alpha_1)^{k_1}(\lambda - \alpha_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t},$$

то

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{k_1} + A_{\alpha_1} & O & \dots & O \\ O & \alpha_2 E_{k_2} + A_{\alpha_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \alpha_t E_{k_t} + A_{\alpha_t} \end{pmatrix}.$$

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$.

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p\mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \dots + a_1\mathcal{A}x + a_0\mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор.

Пусть $f = a_px^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p\mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \cdots + a_1\mathcal{A}x + a_0\mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор. Многочлен $f$ *аннулирует оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор.

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p \mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \cdots + a_1 \mathcal{A}x + a_0 \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор. Многочлен $f$ *аннулирует оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор.

**Предложение (существование аннулирующих многочленов)**

*Для любого линейного оператора на конечномерном пространстве существует ненулевой аннулирующий многочлен.*

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p\mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \cdots + a_1\mathcal{A}x + a_0\mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор. Многочлен $f$ *аннулирует оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор.

**Предложение (существование аннулирующих многочленов)**

*Для любого линейного оператора на конечномерном пространстве существует ненулевой аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Если $\dim V = n$, то размерность пространства всех линейных операторов на пространстве $V$ равна $n^2$.

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p\mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \cdots + a_1\mathcal{A}x + a_0\mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор. Многочлен $f$ *аннулирует оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор.

**Предложение (существование аннулирующих многочленов)**

*Для любого линейного оператора на конечномерном пространстве существует ненулевой аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Если $\dim V = n$, то размерность пространства всех линейных операторов на пространстве $V$ равна $n^2$. Поэтому для любого оператора $\mathcal{A}$ система $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^{n^2}$ линейно зависима.

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p\mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \cdots + a_1\mathcal{A}x + a_0\mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор. Многочлен $f$ *аннулирует оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор.

**Предложение (существование аннулирующих многочленов)**

*Для любого линейного оператора на конечномерном пространстве существует ненулевой аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Если $\dim V = n$, то размерность пространства всех линейных операторов на пространстве $V$ равна $n^2$. Поэтому для любого оператора $\mathcal{A}$ система $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^{n^2}$ линейно зависима. Значит, есть такие скаляры $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$, не все равные 0, что

$$a_0\mathcal{E} + a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{A}^2 + \cdots + a_{n^2}\mathcal{A}^{n^2} = \mathcal{O}.$$

Пусть $f = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен над полем $F$, а $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве $V$ над $F$. *Значением многочлена* $f$ от $\mathcal{A}$ называется оператор

$$f(\mathcal{A}) = a_p\mathcal{A}^p + a_{p-1}\mathcal{A}^{p-1} + \cdots + a_1\mathcal{A}x + a_0\mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – единичный оператор. Многочлен $f$ *аннулирует оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – нулевой оператор.

**Предложение (существование аннулирующих многочленов)**

*Для любого линейного оператора на конечномерном пространстве существует ненулевой аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Если $\dim V = n$, то размерность пространства всех линейных операторов на пространстве $V$ равна $n^2$. Поэтому для любого оператора $\mathcal{A}$ система $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^{n^2}$ линейно зависима. Значит, есть такие скаляры $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$, не все равные 0, что

$$a_0\mathcal{E} + a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{A}^2 + \cdots + a_{n^2}\mathcal{A}^{n^2} = \mathcal{O}.$$

Если $f := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n^2}x^{n^2}$, то $f \neq 0$ и $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. $\square$

# Минимальный многочлен оператора

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

# Минимальный многочлен оператора

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

**Предложение (свойство минимального многочлена)**

*Минимальный многочлен линейного оператора делит любой его аннулирующий многочлен.*

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

**Предложение (свойство минимального многочлена)**

*Минимальный многочлен линейного оператора делит любой его аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Пусть $f$ – произвольный аннулирующий многочлен оператора $\mathcal{A}$, а $m$ – минимальный многочлен.

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

**Предложение (свойство минимального многочлена)**

*Минимальный многочлен линейного оператора делит любой его аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Пусть $f$ – произвольный аннулирующий многочлен оператора $\mathcal{A}$, а $m$ – минимальный многочлен. Поделим с остатком: $f = qm + r$, где $\deg r < \deg m$.

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

**Предложение (свойство минимального многочлена)**

*Минимальный многочлен линейного оператора делит любой его аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Пусть $f$ – произвольный аннулирующий многочлен оператора $\mathcal{A}$, а $m$ – минимальный многочлен. Поделим с остатком: $f = qm + r$, где $\deg r < \deg m$. Подставив в это равенство оператор $\mathcal{A}$, получим $f(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})m(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$, откуда $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

**Предложение (свойство минимального многочлена)**

*Минимальный многочлен линейного оператора делит любой его аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Пусть $f$ – произвольный аннулирующий многочлен оператора $\mathcal{A}$, а $m$ – минимальный многочлен. Поделим с остатком: $f = qm + r$, где $\deg r < \deg m$. Подставив в это равенство оператор $\mathcal{A}$, получим $f(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})m(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$, откуда $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Но $m$ – ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, следовательно, $r = 0$ и $m$ делит $f$. $\square$

*Минимальным многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$.

**Предложение (свойство минимального многочлена)**

*Минимальный многочлен линейного оператора делит любой его аннулирующий многочлен.*

*Доказательство.* Пусть $f$ – произвольный аннулирующий многочлен оператора $\mathcal{A}$, а $m$ – минимальный многочлен. Поделим с остатком: $f = qm + r$, где $\deg r < \deg m$. Подставив в это равенство оператор $\mathcal{A}$, получим $f(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})m(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$, откуда $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Но $m$ – ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, следовательно, $r = 0$ и $m$ делит $f$. $\square$

Из предложения следует, что минимальный многочлен оператора единствен с точностью до ассоциированности.

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$. *Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2}\cdots(\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$*. Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2}\cdots(\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$.

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и $s_i$ – высота корневого подпространства $V_{\alpha_i}$. Минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$ есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2}\cdots(\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$.

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$. *Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$. По определению корневого подпространства имеем $(\mathcal{A} - \alpha_i \mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$.

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$*. Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$. По определению корневого подпространства имеем $(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Поэтому

$$m(\mathcal{A})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} m(\mathcal{A})\mathbf{x}_i$$

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$. *Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$. По определению корневого подпространства имеем $(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Поэтому

$$m(\mathcal{A})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} m(\mathcal{A})\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{t} \prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \cdot (\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$. *Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$. По определению корневого подпространства имеем $(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Поэтому

$$m(\mathcal{A})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} m(\mathcal{A})\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{t}\prod_{j\neq i}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \cdot (\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Здесь использовано, что многочлены от оператора перестановочны.

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и* $s_i$ *– высота корневого подпространства* $V_{\alpha_i}$*. Минимальный многочлен оператора* $\mathcal{A}$ *есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$. По определению корневого подпространства имеем $(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Поэтому

$$m(\mathcal{A})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} m(\mathcal{A})\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{t} \prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \cdot (\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Здесь использовано, что многочлены от оператора перестановочны.

По доказанному выше минимальный многочлен должен делить $m(\lambda)$.

**Теорема (о минимальном многочлене)**

*Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор,* $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ *содержится в поле скаляров и $s_i$ – высота корневого подпространства $V_{\alpha_i}$. Минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$ есть*

$$m(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2}\cdots(\lambda - \alpha_t)^{s_t}.$$

*Доказательство.* Сперва поймем, что многочлен $m(\lambda)$ аннулирует $\mathcal{A}$. Пользуясь корневым разложением, представим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ как $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in V_{\alpha_i}$. По определению корневого подпространства имеем $(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Поэтому

$$m(\mathcal{A})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{t} m(\mathcal{A})\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{t}\prod_{j\neq i}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j}\cdot(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{s_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Здесь использовано, что многочлены от оператора перестановочны.

По доказанному выше минимальный многочлен должен делить $m(\lambda)$. Проверим, что никакой собственный делитель этого многочлена не аннулирует оператор $\mathcal{A}$.

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{q_1}(\lambda - \alpha_2)^{q_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \leq s_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{q_1}(\lambda - \alpha_2)^{q_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \le s_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.Возмем вектор $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j - 1}$ – он существует по определению высоты корневого подпространства.

# Теорема о минимальном многочлене (2)

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{q_1}(\lambda - \alpha_2)^{q_2}\cdots(\lambda - \alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \le s_i$ для всех $i = 1, \dots, t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.Возмем вектор $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j-1}$ – он существует по определению высоты корневого подпространства. Тогда $(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$, откуда

$$n(\mathcal{A})\mathbf{y} = \prod_{i\ne j}(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{q_i}\cdot(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \ne \mathbf{0},$$

ибо при $i \ne j$ оператор $\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E}$ невырожден на подпространстве $V_{\alpha_i}$. □

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{q_1}(\lambda - \alpha_2)^{q_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \le s_i$ для всех $i = 1, \dots, t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.Возмем вектор $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j-1}$ – он существует по определению высоты корневого подпространства. Тогда $(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$, откуда

$$n(\mathcal{A})\mathbf{y} = \prod_{i \ne j}(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{q_i} \cdot (\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \ne \mathbf{0},$$

ибо при $i \ne j$ оператор $\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E}$ невырожден на подпространстве $V_{\alpha_i}$. $\square$

Ясно, что высота корневого подпространства не больше его размерности.

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda-\alpha_1)^{q_1}(\lambda-\alpha_2)^{q_2}\cdots(\lambda-\alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \le s_i$ для всех $i = 1,\dots,t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.Возмем вектор $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{s_j-1}$ – он существует по определению высоты корневого подпространства. Тогда $(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$, откуда

$$n(\mathcal{A})\mathbf{y} = \prod_{i\ne j}(\mathcal{A}-\alpha_i\mathcal{E})^{q_i}\cdot(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \ne \mathbf{0},$$

ибо при $i \ne j$ оператор $\mathcal{A}-\alpha_i\mathcal{E}$ невырожден на подпространстве $V_{\alpha_i}$. $\square$

Ясно, что высота корневого подпространства не больше его размерности. Поэтому характеристический многочлен $(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\alpha_t)^{k_t}$ делится на минимальный многочлен $(\lambda-\alpha_1)^{s_1}(\lambda-\alpha_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\alpha_t)^{s_t}$.

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{q_1}(\lambda - \alpha_2)^{q_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \leq s_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.Возмем вектор $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \setminus \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{s_j-1}$ – он существует по определению высоты корневого подпространства. Тогда $(\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, откуда

$$n(\mathcal{A})\mathbf{y} = \prod_{i \neq j}(\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E})^{q_i} \cdot (\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

ибо при $i \neq j$ оператор $\mathcal{A} - \alpha_i\mathcal{E}$ невырожден на подпространстве $V_{\alpha_i}$. $\square$

Ясно, что высота корневого подпространства не больше его размерности. Поэтому характеристический многочлен $(\lambda - \alpha_1)^{k_1}(\lambda - \alpha_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$ делится на минимальный многочлен $(\lambda - \alpha_1)^{s_1}(\lambda - \alpha_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{s_t}$. Из этого наблюдения вытекает красивое следствие:

**Теорема Гамильтона–Кэли (Фердинанд Георг Фробениус, 1878)**

*Характеристический многочлен оператора аннулирует оператор.*

Любой собственный делитель многочлена $m(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) := (\lambda-\alpha_1)^{q_1}(\lambda-\alpha_2)^{q_2}\cdots(\lambda-\alpha_t)^{q_t},$$

где $q_i \le s_i$ для всех $i=1,\ldots,t$ и $q_j < s_j$ для какого-то $j$.Возмем вектор $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{s_j} \setminus \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{s_j-1}$ – он существует по определению высоты корневого подпространства. Тогда $(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, откуда

$$n(\mathcal{A})\mathbf{y} = \prod_{i\neq j}(\mathcal{A}-\alpha_i\mathcal{E})^{q_i}\cdot(\mathcal{A}-\alpha_j\mathcal{E})^{q_j}\mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

ибо при $i \neq j$ оператор $\mathcal{A}-\alpha_i\mathcal{E}$ невырожден на подпространстве $V_{\alpha_i}$. $\square$

Ясно, что высота корневого подпространства не больше его размерности. Поэтому характеристический многочлен $(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\alpha_t)^{k_t}$ делится на минимальный многочлен $(\lambda-\alpha_1)^{s_1}(\lambda-\alpha_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\alpha_t)^{s_t}$. Из этого наблюдения вытекает красивое следствие:

**Теорема Гамильтона–Кэли (Фердинанд Георг Фробениус, 1878)**

*Характеристический многочлен оператора аннулирует оператор.*

Это – мощное тождество, неочевидное даже для $3\times 3$-матриц.

# Критерий диагонализируемости

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора.

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора. Напомним, что *диагонализируемыми* или *приводимыми к диагональному виду* называют операторы, допускающие базис из собственных векторов.

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора. Напомним, что *диагонализируемыми* или *приводимыми к диагональному виду* называют операторы, допускающие базис из собственных векторов.

**Теорема (критерий диагонализируемости)**

*Оператор, спектр которого лежит в поле скаляров, диагонализируем, если и только если его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

# Критерий диагонализируемости

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора. Напомним, что *диагонализируемыми* или *приводимыми к диагональному виду* называют операторы, допускающие базис из собственных векторов.

**Теорема (критерий диагонализируемости)**

*Оператор, спектр которого лежит в поле скаляров, диагонализируем, если и только если его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

*Доказательство.* Если минимальный многочлен не имеет кратных корней, то высота каждого корневого подпространства равна 1, а тогда все корневые вектора будут собственными.

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора. Напомним, что *диагонализируемыми* или *приводимыми к диагональному виду* называют операторы, допускающие базис из собственных векторов.

**Теорема (критерий диагонализируемости)**

*Оператор, спектр которого лежит в поле скаляров, диагонализируем, если и только если его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

*Доказательство.* Если минимальный многочлен не имеет кратных корней, то высота каждого корневого подпространства равна 1, а тогда все корневые вектора будут собственными. Поэтому у такого оператора есть базис из собственных векторов.

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора. Напомним, что *диагонализируемыми* или *приводимыми к диагональному виду* называют операторы, допускающие базис из собственных векторов.

**Теорема (критерий диагонализируемости)**

*Оператор, спектр которого лежит в поле скаляров, диагонализируем, если и только если его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

*Доказательство.* Если минимальный многочлен не имеет кратных корней, то высота каждого корневого подпространства равна 1, а тогда все корневые вектора будут собственными. Поэтому у такого оператора есть базис из собственных векторов.

Обратно, если оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем и $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t\}$, то используя диагональную матрицу оператора $\mathcal{A}$, легко подсчитать, что многочлен $(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_t)$ аннулирует $\mathcal{A}$. □

Другим важным следствием теоремы о минимальном многочлене является критерий диагонализируемости линейного оператора. Напомним, что *диагонализируемыми* или *приводимыми к диагональному виду* называют операторы, допускающие базис из собственных векторов.

**Теорема (критерий диагонализируемости)**

*Оператор, спектр которого лежит в поле скаляров, диагонализируем, если и только если его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

*Доказательство.* Если минимальный многочлен не имеет кратных корней, то высота каждого корневого подпространства равна 1, а тогда все корневые вектора будут собственными. Поэтому у такого оператора есть базис из собственных векторов.

Обратно, если оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем и $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$, то используя диагональную матрицу оператора $\mathcal{A}$, легко подсчитать, что многочлен $(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_t)$ аннулирует $\mathcal{A}$. □

Отмечавшийся ранее факт, что операторы, у которых характеристический многочлен не имеет кратных корней, диагонализируемы, является простейшим частным случаем доказанного сейчас критерия.

# Критерий диагонализируемости (2)

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

# Критерий диагонализируемости (2)

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его!

# Критерий диагонализируемости (2)

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

# Критерий диагонализируемости (2)

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0.

Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0. Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$. Если $f = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то $g = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_t)$ – многочлен без кратных корней с теми же корнями, что у $f$.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0. Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$. Если $f = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то $g = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_t)$ – многочлен без кратных корней с теми же корнями, что у $f$. Теперь подсчитаем значение $g(\mathcal{A})$. Если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, то $g$ – минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$. В этом случае у минимального многочлена нет кратных корней.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0. Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$. Если $f = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то $g = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_t)$ – многочлен без кратных корней с теми же корнями, что у $f$. Теперь подсчитаем значение $g(\mathcal{A})$. Если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, то $g$ – минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$. В этом случае у минимального многочлена нет кратных корней. Если же $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$, то у минимального многочлена есть кратные корни.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0. Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$. Если $f = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то $g = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_t)$ – многочлен без кратных корней с теми же корнями, что у $f$. Теперь подсчитаем значение $g(\mathcal{A})$. Если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, то $g$ – минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$. В этом случае у минимального многочлена нет кратных корней. Если же $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$, то у минимального многочлена есть кратные корни.

Отметим еще, что иногда удается вывести отсутствие у минимального многочлена оператора $\mathcal{A}$ кратных корней из свойств самого оператора.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0. Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$. Если $f = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то $g = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_t)$ – многочлен без кратных корней с теми же корнями, что у $f$. Теперь подсчитаем значение $g(\mathcal{A})$. Если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, то $g$ – минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$. В этом случае у минимального многочлена нет кратных корней. Если же $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$, то у минимального многочлена есть кратные корни.

Отметим еще, что иногда удается вывести отсутствие у минимального многочлена оператора $\mathcal{A}$ кратных корней из свойств самого оператора. Например, если $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ (*идемпотентный* оператор), то $\mathcal{A}$ аннулируется многочленом $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ без кратных корней.

Как использовать критерий диагонализируемости? Вычисление минимального многочлена – непростая задача, простой явной формулы (как для характеристического многочлена) в этом случае нет.

Оказывается, над полем нулевой характеристики можно проверить, имеются ли у минимального многочлена кратные корни, не вычисляя его! Применим технику отделения кратных множителей из §I.5.

Пусть $f$ – характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на векторном пространстве над полем характеристики 0. Вычислим многочлен $g := \dfrac{f}{\text{НОД}(f, f')}$. Если $f = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то $g = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_t)$ – многочлен без кратных корней с теми же корнями, что у $f$. Теперь подсчитаем значение $g(\mathcal{A})$. Если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, то $g$ – минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$. В этом случае у минимального многочлена нет кратных корней. Если же $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$, то у минимального многочлена есть кратные корни.

Отметим еще, что иногда удается вывести отсутствие у минимального многочлена оператора $\mathcal{A}$ кратных корней из свойств самого оператора. Например, если $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ (*идемпотентный* оператор), то $\mathcal{A}$ аннулируется многочленом $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ без кратных корней. Поэтому минимальный многочлен идемпотентного оператора не имеет кратных корней.