

Тема V: Линейные отображения

§ 4. Применения ранга

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная матрица с элементами из некоторого поля F .

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная матрица с элементами из некоторого поля F .

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A , в пространстве всех столбцов высоты k над полем F .

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная матрица с элементами из некоторого поля F .

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A , в пространстве всех столбцов высоты k над полем F .

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A , в пространстве всех строк длины n над полем F .

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная матрица с элементами из некоторого поля F .

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A , в пространстве всех столбцов высоты k над полем F .

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A , в пространстве всех строк длины n над полем F .

Мы доказали следующий важный результат:

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A .

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.
Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
Число r и будет рангом матрицы A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.
Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
Число r и будет рангом матрицы A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.
 Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
 Число r и будет рангом матрицы A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.
 Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
 Число r и будет рангом матрицы A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.
 Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
 Число r и будет рангом матрицы A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.
Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах $1,1; 2,2; \dots; r,r$ стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
Число r и будет рангом матрицы A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен 2.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n .

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n .

Доказательство. С каждой $n \times n$ -матрицей A связано линейное преобразование f пространства столбцов высоты n , определенное правилом $f(x) := Ax$ для любого вектора-столбца x .

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n .

Доказательство. С каждой $n \times n$ -матрицей A связано линейное преобразование f пространства столбцов высоты n , определенное правилом $f(x) := Ax$ для любого вектора-столбца x . При этом матрица A будет матрицей этого преобразования f (в стандартном базисе пространства столбцов).

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n .

Доказательство. С каждой $n \times n$ -матрицей A связано линейное преобразование f пространства столбцов высоты n , определенное правилом $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца \mathbf{x} . При этом матрица A будет матрицей этого преобразования f (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [f]$ обратима тогда и только тогда, когда обратимо преобразование f .

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n .

Доказательство. С каждой $n \times n$ -матрицей A связано линейное преобразование f пространства столбцов высоты n , определенное правилом $f(x) := Ax$ для любого вектора-столбца x . При этом матрица A будет матрицей этого преобразования f (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [f]$ обратима тогда и только тогда, когда обратимо преобразование f . Если f обратимо, то его образ совпадает со всем пространством столбцов, а значит, ранг f равен n .

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1} .

Мы поставили два естественных вопроса:

- 1 Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
- 2 Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1} ?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n .

Доказательство. С каждой $n \times n$ -матрицей A связано линейное преобразование f пространства столбцов высоты n , определенное правилом $f(x) := Ax$ для любого вектора-столбца x . При этом матрица A будет матрицей этого преобразования f (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [f]$ обратима тогда и только тогда, когда обратимо преобразование f .

Если f обратимо, то его образ совпадает со всем пространством столбцов, а значит, ранг f равен n . Так как ранг линейного отображения совпадает с рангом его матрицы, заключаем, что ранг A равен n .

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n .

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n .
Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя.

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое.

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое. Покажем, что тогда f взаимно однозначно. Предположим, что $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое. Покажем, что тогда f взаимно однозначно. Предположим, что $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов \mathbf{x} и \mathbf{y} . Тогда $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое. Покажем, что тогда f взаимно однозначно. Предположим, что $f(x) = f(y)$ для некоторых векторов-столбцов x и y . Тогда $f(x - y) = f(x) - f(y) = \mathbf{0}$, откуда $x - y = \mathbf{0}$, т.е. $x = y$. Тем самым, f — взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимое преобразование. □

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое. Покажем, что тогда f взаимно однозначно. Предположим, что $f(x) = f(y)$ для некоторых векторов-столбцов x и y . Тогда $f(x - y) = f(x) - f(y) = \mathbf{0}$, откуда $x - y = \mathbf{0}$, т.е. $x = y$. Тем самым, f — взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимое преобразование. \square

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1} .

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое. Покажем, что тогда f взаимно однозначно. Предположим, что $f(x) = f(y)$ для некоторых векторов-столбцов x и y . Тогда $f(x - y) = f(x) - f(y) = \mathbf{0}$, откуда $x - y = \mathbf{0}$, т.е. $x = y$. Тем самым, f — взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимое преобразование. \square

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1} .

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$ -матрице A слева единичную $n \times n$ -матрицу и сделаем над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1} .

Обратно, если ранг матрицы A равен n , то ранг преобразования f равен n . Значит, образ f совпадает со всем пространством столбцов, т.е. f — отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро отображения f нулевое. Покажем, что тогда f взаимно однозначно. Предположим, что $f(x) = f(y)$ для некоторых векторов-столбцов x и y . Тогда $f(x - y) = f(x) - f(y) = \mathbf{0}$, откуда $x - y = \mathbf{0}$, т.е. $x = y$. Тем самым, f — взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимое преобразование. \square

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1} .

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$ -матрице A слева единичную $n \times n$ -матрицу и сделаем над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1} .

Замечание: можно приписывать единичную матрицу сверху и проделывать элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$ -матрицы $\frac{E}{A}$. Тогда A^{-1} возникнет в «числителе», когда «знаменатель» станет равным E .

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right) \\ & \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)?

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$ -матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками!

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$ -матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$ -матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n , ее столбцы линейно независимы.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$ -матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n , ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$ -матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n , ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.

С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$ -матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n , ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.

С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II, III}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через

первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов b_{22}, \dots, b_{n2} должен быть ненулевой.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через

первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов b_{22}, \dots, b_{n2} должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через

первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов b_{22}, \dots, b_{n2} должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулیم остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II, III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через

первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов b_{22}, \dots, b_{n2} должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II, III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через

первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов b_{22}, \dots, b_{n2} должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II, III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. В силу линейной независимости столбцов никакой столбец не может выражаться через предыдущие столбцы.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через

первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов b_{22}, \dots, b_{n2} должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулیم остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II, III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. В силу линейной независимости столбцов никакой столбец не может выражаться через предыдущие столбцы. Поэтому на шаге, когда обработаны первые j столбцов ($j < n$), среди «поддиагональных» элементов $(j+1)$ -го столбца найдется ненулевой, и процесс можно продолжать, пока не будут обработаны все n столбцов.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1} ?

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1} ?
Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1} ? Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1} ? Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Для каждого элементарного преобразования над столбцами (строками) A построим матрицу, умножение на которую справа (слева) дает тот же результат.

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».

Лемма о элементарных преобразованиях — интуиция

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».



Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице E* .

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E . Та матрица T , которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E . Та матрица T , которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Перестановка i -го и j -го столбцов (i -й и j -й строк) матрицы A равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix},$$

которая получается, если в единичной матрице переставить i -й и j -й столбцы (или, что равносильно, переставить i -ю и j -ю строки).

Добавление к i -му столбцу матрицы A ее j -го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix},$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i -му столбцу j -й столбец.

Добавление к i -му столбцу матрицы A ее j -го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{0} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i -му столбцу j -й столбец. Аналогично, добавление к i -й строке матрицы A ее j -й строки равносильно умножению A слева на матрицу, которая получается, если в единичной матрице прибавить к i -й строке j -ю строку (показано красным).

Умножение i -го столбца (i -й строки) матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$ равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix},$$

которая получается, если в единичной матрице умножить i -й столбец (или, что равносильно, i -ю строку) на λ . □

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \dots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \dots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть T_1, \dots, T_s — такие $n \times n$ -матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X .

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \dots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть T_1, \dots, T_s — такие $n \times n$ -матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X . Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \dots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть T_1, \dots, T_s — такие $n \times n$ -матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X . Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B.$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \dots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть T_1, \dots, T_s — такие $n \times n$ -матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X . Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. □

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$ -матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \dots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть T_1, \dots, T_s — такие $n \times n$ -матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X . Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. \square

Замечание: аналогично обосновывается «вертикальный» вариант алгоритма, когда единичную матрицу приписывают сверху и проределывают элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$ -матрицы $\frac{E}{A}$ до тех пор, пока «знаменатель» не станет равным E .

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений.

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений. Рассмотрим произвольную систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{array} \right. \quad (*)$$

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы (*) через B . Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A , условимся обозначать через V_A , а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B , — через V_B .

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы (\star) через B . Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A , условимся обозначать через V_A , а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B , — через V_B .

Заметим, что система (\star) может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Следовательно, система (\star) совместна в том и только в том случае, когда вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A , т. е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы $(*)$ через B . Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A , условимся обозначать через V_A , а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B , — через V_B .

Заметим, что система $(*)$ может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Следовательно, система $(*)$ совместна в том и только в том случае, когда вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A , т. е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система $(*)$ совместна. Тогда вектор \mathbf{b} принадлежит пространству V_A . Это значит, что вектора-столбцы матрицы B принадлежат V_A , и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B . Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т. е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B . В силу теоремы о ранге матрицы, ранги матриц A и B равны.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A , т. е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B . Размерность пространства V_B равна r . Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B . Вектор \mathbf{b} принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$, а значит и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A . Следовательно, система (\star) совместна. \square

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A , т. е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B . Размерность пространства V_B равна r . Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B . Вектор \mathbf{b} принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$, а значит и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A . Следовательно, система (\star) совместна. \square

Теорема Кронекера–Капелли называется:

- теоремой Кронекера–Капелли в Австрии, Германии, Польше и России;
- теоремой Руше–Капелли в Италии и англоязычных странах;
- теоремой Руше–Фонтене во Франции;
- теоремой Руше–Фробениуса в Испании и странах Латинской Америки;
- теоремой Фробениуса в Чехии и Словакии.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A , т. е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B . Размерность пространства V_B равна r . Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B . Вектор \mathbf{b} принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$, а значит и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A . Следовательно, система (\star) совместна. \square

Теорема Кронекера–Капелли называется:

- теоремой Кронекера–Капелли в Австрии, Германии, Польше и России;
- теоремой Руше–Капелли в Италии и англоязычных странах;
- теоремой Руше–Фонтене во Франции;
- теоремой Руше–Фробениуса в Испании и странах Латинской Америки;
- теоремой Фробениуса в Чехии и Словакии.

Она была впервые опубликована в 1867 г. английским математиком Чарльзом Доджсоном, более известным под псевдонимом Льюис Кэрролл как автор «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье».