Тема V: Линейные отображения

§ 3. Линейные отображения и матрицы

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2 (над тем же самым полем).

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2 (над тем же самым полем).

Если пространство V_1 конечномерно, то такое отображение f полностью определяется векторами $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_k) \in V_2$, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V_1.

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2 (над тем же самым полем).

Если пространство V_1 конечномерно, то такое отображение f полностью определяется векторами $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_k) \in V_2$, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V_1.

Если же и пространство V_2 конечномерно и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ — базис V_2, то каждый из векторов $f(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, полностью определяется столбцом своих координат в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$.

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2 (над тем же самым полем).

Если пространство V_1 конечномерно, то такое отображение f полностью определяется векторами $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_k) \in V_2$, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V_1.

Если же и пространство V_2 конечномерно и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ — базис V_2, то каждый из векторов $f(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, полностью определяется столбцом своих координат в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$.

Итак, если $f(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{b}_j$, то *матрица*

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

определяет отображение f.

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2 (над тем же самым полем).

Если пространство V_1 конечномерно, то такое отображение f полностью определяется векторами $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_k) \in V_2$, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V_1.

Если же и пространство V_2 конечномерно и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ — базис V_2, то каждый из векторов $f(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, полностью определяется столбцом своих координат в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$.

Итак, если $f(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{b}_j$, то *матрица*

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

определяет отображение f. Более того, $[f][\mathbf{x}] = [f(\mathbf{x})]$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$.

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Более того, если $f\colon V_1 \to V_2$ и $g\colon V_2 \to V_3$ — линейные отображения, то $[f \circ g] = [g][f]$, т.е. матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матрицы «внешнего» отображения на матрицу «внутреннего» отображения.

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Более того, если $f\colon V_1 \to V_2$ и $g\colon V_2 \to V_3$ — линейные отображения, то $[f \circ g] = [g][f]$, т.е. матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матрицы «внешнего» отображения на матрицу «внутреннего» отображения.

Искусство линейной алгебры как раз и состоит в выборе для каждой задачи того языка — операторного (геометрического) или матричного (алгебраического), — на котором эту задачу легче решать.

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Более того, если $f\colon V_1 \to V_2$ и $g\colon V_2 \to V_3$ — линейные отображения, то $[f \circ g] = [g][f]$, т.е. матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матрицы «внешнего» отображения на матрицу «внутреннего» отображения.

Искусство линейной алгебры как раз и состоит в выборе для каждой задачи того языка — операторного (геометрического) или матричного (алгебраического), — на котором эту задачу легче решать. Перевод на матричный язык позволяет заменять нетривиальные геометрические построения простыми манипуляциями с матрицами

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Более того, если $f\colon V_1 \to V_2$ и $g\colon V_2 \to V_3$ — линейные отображения, то $[f \circ g] = [g][f]$, т.е. матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матрицы «внешнего» отображения на матрицу «внутреннего» отображения.

Искусство линейной алгебры как раз и состоит в выборе для каждой задачи того языка — операторного (геометрического) или матричного (алгебраического), — на котором эту задачу легче решать. Перевод на матричный язык позволяет заменять нетривиальные геометрические построения простыми манипуляциями с матрицами, а перевод на операторный язык позволяет заменять громоздкие выкладки прозрачными соображениями.

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Более того, если $f: V_1 \to V_2$ и $g: V_2 \to V_3$ — линейные отображения, то $[f \circ g] = [g][f]$, т.е. матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матрицы «внешнего» отображения на матрицу «внутреннего» отображения.

Искусство линейной алгебры как раз и состоит в выборе для каждой задачи того языка — операторного (геометрического) или матричного (алгебраического), — на котором эту задачу легче решать. Перевод на матричный язык позволяет заменять нетривиальные геометрические построения простыми манипуляциями с матрицами, а перевод на операторный язык позволяет заменять громоздкие выкладки прозрачными соображениями. Уже встречавшийся пример второго рода — доказательство ассоциативности умножения матриц по правилу «строка на столбец».

Можно сказать, что матрицы — это координаты линейных отображений.

При этом выполняются привычные свойства координат: матрица суммы двух линейных отображений равна сумме матриц этих отображений, матрица произведения линейного отображения f на скаляр t равна произведению t на матрицу отображения f.

Более того, если $f\colon V_1 \to V_2$ и $g\colon V_2 \to V_3$ — линейные отображения, то $[f \circ g] = [g][f]$, т.е. матрица композиции двух линейных отображений равна произведению матрицы «внешнего» отображения на матрицу «внутреннего» отображения.

Искусство линейной алгебры как раз и состоит в выборе для каждой задачи того языка — операторного (геометрического) или матричного (алгебраического), — на котором эту задачу легче решать. Перевод на матричный язык позволяет заменять нетривиальные геометрические построения простыми манипуляциями с матрицами, а перевод на операторный язык позволяет заменять громоздкие выкладки прозрачными соображениями. Уже встречавшийся пример второго рода — доказательство ассоциативности умножения матриц по правилу «строка на столбец». Мы вывели его из ассоциативности композиции отображений — для сравнения попробуйте проверить равенство $(AB)C = A(BC)$ для произвольных матриц A, B и C прямой выкладкой.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := f^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := f^{-1}(\mathbf{y}_2)$.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := f^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := f^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, откуда $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := f^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := f^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, откуда $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Аналогично проверяется, что $f^{-1}(t\mathbf{y}) = tf^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := f^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := f^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, откуда $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Аналогично проверяется, что $f^{-1}(t\mathbf{y}) = tf^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Вспомним, что взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2 мы называли *изоморфизмом*.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := f^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := f^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, откуда $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Аналогично проверяется, что $f^{-1}(t\mathbf{y}) = tf^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Вспомним, что взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2 мы называли *изоморфизмом*. У изоморфных пространств одинаковы размерности, поэтому матрица обратимого линейного отображения будет *квадратной*.

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[f \circ f^{-1}] = E$ и $[f^{-1} \circ f] = E$, где E — единичная матрица. Отсюда $[f^{-1}][f] = E$ и $[f][f^{-1}] = E$.

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[f \circ f^{-1}] = E$ и $[f^{-1} \circ f] = E$, где E — единичная матрица. Отсюда $[f^{-1}][f] = E$ и $[f][f^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [f]$, $B := [f^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$.

Обратная матрица

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[f \circ f^{-1}] = E$ и $[f^{-1} \circ f] = E$, где E — единичная матрица. Отсюда $[f^{-1}][f] = E$ и $[f][f^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [f]$, $B := [f^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a.

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[f \circ f^{-1}] = E$ и $[f^{-1} \circ f] = E$, где E — единичная матрица. Отсюда $[f^{-1}][f] = E$ и $[f][f^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [f]$, $B := [f^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}.

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[f \circ f^{-1}] = E$ и $[f^{-1} \circ f] = E$, где E — единичная матрица. Отсюда $[f^{-1}][f] = E$ и $[f][f^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [f]$, $B := [f^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}. В соответствии с этим, матрица B такая, что $AB = BA = E$ для данной матрицы A называется *обратной* к матрице A и обозначается через A^{-1}.

Если $f\colon V_1 \to V_2$ — взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то а $f^{-1}\colon V_2 \to V_1$ — обратное отображение, то композиция $f \circ f^{-1}$ — тождественное отображение пространства V_1, а композиция $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[f \circ f^{-1}] = E$ и $[f^{-1} \circ f] = E$, где E — единичная матрица. Отсюда $[f^{-1}][f] = E$ и $[f][f^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [f]$, $B := [f^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}. В соответствии с этим, матрица B такая, что $AB = BA = E$ для данной матрицы A называется *обратной* к матрице A и обозначается через A^{-1}.

Возникает два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.
Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь — по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать.

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь — по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь — по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы подробно изучим некоторые преобразования со строками и столбцами матрицы и докажем, что эти преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам.

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь — по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы подробно изучим некоторые преобразования со строками и столбцами матрицы и докажем, что эти преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью описанных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь — по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы подробно изучим некоторые преобразования со строками и столбцами матрицы и докажем, что эти преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью описанных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

Вот список преобразований, которые мы будем называть *элементарными*:

I: Перестановка двух столбцов (строк).

II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).

III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь — по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы подробно изучим некоторые преобразования со строками и столбцами матрицы и докажем, что эти преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью описанных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

Вот список преобразований, которые мы будем называть *элементарными*:

I: Перестановка двух столбцов (строк).
II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).
III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

На практике элементарные преобразования II-го и III-го родов обычно комбинируют, чтобы прибавить к столбцу (строке) произведение другого столбца (другой строки) на ненулевой скаляр:

$$\begin{aligned}(\dots\ \mathbf{a}_i\ \dots\ \mathbf{a}_j\ \dots) &\xrightarrow{\text{III}:\lambda\times j} (\dots\ \mathbf{a}_i\ \dots\ \lambda\mathbf{a}_j\dots) \xrightarrow{\text{II}:i+j} \\ &(\dots\ \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j\ \dots\ \lambda\mathbf{a}_j\dots) \xrightarrow{\text{III}:\lambda^{-1}\times j} (\dots\ \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j\ \dots\ \mathbf{a}_j\dots)\end{aligned}$$

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо.

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо. Каждое преобразование I-го рода обратно само себе: если поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки) матрицы A, а в получившейся матрице снова поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки), то вернемся к исходной матрице A.

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо. Каждое преобразование I-го рода обратно само себе: если поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки) матрицы A, а в получившейся матрице снова поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки), то вернемся к исходной матрице A.

Обратным к преобразованию II-го рода, которое прибавляет к i-му столбцу j-й столбец (к i-й строке j-ю строку), будет преобразование, которое вычитает из i-го столбца j-й столбец (из i-й строки j-ю строку). Выше показано, как скомбинировать такое вычитание из преобразований II-го и III-го родов.

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо. Каждое преобразование I-го рода обратно само себе: если поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки) матрицы A, а в получившейся матрице снова поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки), то вернемся к исходной матрице A.

Обратным к преобразованию II-го рода, которое прибавляет к i-му столбцу j-й столбец (к i-й строке j-ю строку), будет преобразование, которое вычитает из i-го столбца j-й столбец (из i-й строки j-ю строку). Выше показано, как скомбинировать такое вычитание из преобразований II-го и III-го родов.

Наконец, обратным к преобразованию III-го рода, которое умножает i-й столбец (i-ю строку) на скаляр $\lambda \neq 0$, будет преобразование, которое умножает i-й столбец (i-ю строку) на скаляр λ^{-1}. $\square$

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Лемма 1

Элементарные преобразования над столбцами матрицы не увеличивают ранг матрицы по столбцам.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Лемма 1

Элементарные преобразования над столбцами матрицы не увеличивают ранг матрицы по столбцам.

Доказательство. Ранг матрицы A по столбцам — это размерность $\dim S$ подпространства S, порождённого столбцами матрицы A. Элементарные преобразования над столбцами матрицы A приводят к матрице A', столбцы которой лежат в S, поэтому подпространство S', порождённое столбцами матрицы A', содержится в S. Отсюда $\dim S' \leqslant \dim S$. □

Если поменять ролями строки и столбцы матрицы $A = (a_{ij})_{k\times n}$, получится *транспонированная* матрица $A^T = (a_{ji})_{n\times k}$.

Если поменять ролями строки и столбцы матрицы $A = (a_{ij})_{k\times n}$, получится *транспонированная* матрица $A^T = (a_{ji})_{n\times k}$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Если поменять ролями строки и столбцы матрицы $A = (a_{ij})_{k\times n}$, получится *транспонированная* матрица $A^T = (a_{ji})_{n\times k}$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Применяя лемму 1 к транспонированной матрице, получаем аналогичный этой лемме «строчный» результат:

Лемма 2

Элементарные преобразования над строками матрицы не увеличивают ранг матрицы по строкам.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Доказательство. В более развернутой формулировке факт, который мы хотим доказать, состоит в следующем. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

строки с номерами $i_1, \ldots, i_s$ линейно зависимы в пространстве строк.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Доказательство. В более развернутой формулировке факт, который мы хотим доказать, состоит в следующем. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы в пространстве строк. Тогда и в матрице A', полученной из A применением какой-то последовательности элементарных преобразований над столбцами, строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ остаются линейно зависимыми, причем, как мы увидим, с теми же коэффициентами.

Итак, пусть строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \ldots & a_{i_1 j} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \ldots & a_{i_s j} & \ldots & a_{i_s n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \ldots, i_s$ линейно зависимы.

Элементарные преобразования сохраняют ранги (4)

Итак, пусть строки матрицы

$$\begin{array}{r@{\ }c} & \\ \gamma_1\times \\ \vdots \\ \gamma_s\times \\ & \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \ \text{ для каждого } \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\star)$$

Итак, пусть строки матрицы

$$\begin{array}{c} \\ \\ \gamma_1\times \\ \vdots \\ \gamma_s\times \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \ldots & a_{i_1 j} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \ldots & a_{i_s j} & \ldots & a_{i_s n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \ldots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \quad \text{для каждого} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\star)$$

Если выполнить элементарное преобразование I-го рода (поменять местами j_1-й и j_2-й столбцы матрицы A), то в системе $(\star)$ просто поменяются местами j_1-е и j_2-е равенства, т.е. система не изменится.

Элементарные преобразования сохраняют ранги (4)

Итак, пусть строки матрицы

$$\begin{array}{r c}
 & \\
\gamma_1 \times & \\
\vdots & \\
\gamma_s \times & \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \ \text{ для каждого } \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\star)$$

Если выполнить элементарное преобразование I-го рода (поменять местами j_1-й и j_2-й столбцы матрицы A), то в системе $(\star)$ просто поменяются местами j_1-е и j_2-е равенства, т.е. система не изменится. Поэтому в преобразованной матрице строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ остаются линейно зависимыми.

Если выполнить элементарное преобразование II-го рода (прибавить к j_1-му столбцу матрицы A ее j_2-й столбец), то все равенства системы

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j} = 0, \qquad (\star)$$

кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1(a_{i_1 j_1} + a_{i_1 j_2}) + \cdots + \gamma_s(a_{i_s j_1} + a_{i_s j_2}) =$$
$$= (\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_1}) + (\gamma_1 a_{i_1 j_2} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_2}) = 0 + 0 = 0.$$

Если выполнить элементарное преобразование II-го рода (прибавить к j_1-му столбцу матрицы A ее j_2-й столбец), то все равенства системы

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0, \qquad (\star)$$

кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1(a_{i_1 j_1} + a_{i_1 j_2}) + \dots + \gamma_s(a_{i_s j_1} + a_{i_s j_2}) = \\ = (\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \dots + \gamma_s a_{i_s j_1}) + (\gamma_1 a_{i_1 j_2} + \dots + \gamma_s a_{i_s j_2}) = 0 + 0 = 0.$$

Аналогично, если выполнить элементарное преобразование III-го рода (умножить j_1-й столбец матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$), то все равенства системы $(\star)$, кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1(\lambda a_{i_1 j_1}) + \dots + \gamma_s(\lambda a_{i_s j_1}) = \lambda(\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \dots + \gamma_s a_{i_s j_1}) = \lambda \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_s$.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \ldots, i_s$. По лемме 3 строки матрицы A с теми же номерами $i_1, \ldots, i_s$ обязаны быть линейно независимыми, откуда ранг матрицы A по строкам не меньше s.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_s$. По лемме 3 строки матрицы A с теми же номерами $i_1, \dots, i_s$ обязаны быть линейно независимыми, откуда ранг матрицы A по строкам не меньше s. Тот же аргумент выводит симметричный результат из леммы 4. $\square$

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам.

Завершение доказательства теоремы о ранге

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0.

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0. Если в A есть ненулевой элемент, то с помощью преобразований I-го рода переставим этот элемент на место 1,1, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1.

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0. Если в A есть ненулевой элемент, то с помощью преобразований I-го рода переставим этот элемент на место 1,1, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов «занулим» все остальные элементы первой строки и первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1.

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1. Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i, j \geq 2$, то преобразованиями I-го рода переставим элемент b_{ij} на место 2,2, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1.

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1. Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i, j \geq 2$, то преобразованиями I-го рода переставим элемент b_{ij} на место 2,2, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов «занулим» все остальные элементы второй строки и второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк.

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк. Теорема о ранге доказана. $\square$

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк. Теорема о ранге доказана. $\square$

Сформулируем еще раз результат, который мы доказали:

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Пусть $f: V_1 \to V_2$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* f мы называли размерность образа отображения f.

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* f мы называли размерность образа отображения f. Если и пространство V_2 конечномерно, с отображением f связывается его матрица $[f]$, столбцы которой — это координаты образов элементов базиса пространства V_1 в базисе пространства V_2.

Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* f мы называли размерность образа отображения f. Если и пространство V_2 конечномерно, с отображением f связывается его матрица $[f]$, столбцы которой — это координаты образов элементов базиса пространства V_1 в базисе пространства V_2. Образы элементов базиса пространства V_1 порождают образ отображения f, поэтому размерность образа равна размерности подпространства, порождённого набором столбцов матрицы $[f]$, т.е. рангу матрицы $[f]$.

Пусть $f: V_1 \to V_2$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* f мы называли размерность образа отображения f. Если и пространство V_2 конечномерно, с отображением f связывается его матрица $[f]$, столбцы которой — это координаты образов элементов базиса пространства V_1 в базисе пространства V_2. Образы элементов базиса пространства V_1 порождают образ отображения f, поэтому размерность образа равна размерности подпространства, порождённого набором столбцов матрицы $[f]$, т.е. рангу матрицы $[f]$.

Итак, ранг линейного отображения равен рангу его матрицы!