

Тема IV: Векторные пространства

§ 2. Базис векторного пространства

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Определение

Система векторов Σ векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то вектора из системы Σ .

Определение

Система векторов Σ векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то вектора из системы Σ .

Лемма о прополке

Если Σ — система образующих векторного пространства V и вектор $\mathbf{a} \in \Sigma$ линейно выражается через другие вектора системы Σ , то и система $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$ является системой образующих пространства V .

Определение

Система векторов Σ векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то вектора из системы Σ .

Лемма о прополке

Если Σ — система образующих векторного пространства V и вектор $\mathbf{a} \in \Sigma$ линейно выражается через другие вектора системы Σ , то и система $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$ является системой образующих пространства V .

Доказательство. Нужно показать, что любой вектор $\mathbf{x} \in V$ линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$. По условию леммы

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k \quad (*)$$

для некоторых $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ и $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$.

Определение

Система векторов Σ векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то вектора из системы Σ .

Лемма о прополке

Если Σ — система образующих векторного пространства V и вектор $\mathbf{a} \in \Sigma$ линейно выражается через другие вектора системы Σ , то и система $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$ является системой образующих пространства V .

Доказательство. Нужно показать, что любой вектор $\mathbf{x} \in V$ линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$. По условию леммы

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k \quad (*)$$

для некоторых $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ и $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ нет вектора \mathbf{a} , то доказывать нечего. Если же $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$ для некоторого i , подставим в (*) вместо \mathbf{a} его выражение через другие вектора системы Σ и получим выражение для \mathbf{x} через вектора из $\Sigma \setminus \{\mathbf{a}\}$. □

Определение

Базисом векторного пространства называется линейно независимая система образующих.

Определение

Базисом векторного пространства называется линейно независимая система образующих.

В случаях плоскости и обычного трёхмерного пространства введённое сейчас понятие базиса совпадает с теми понятиями базиса, которые были введены в этих случаях ранее.

Замечание о базисе плоскости и трёхмерного пространства

- а) *Базисом плоскости является произвольная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.*
- б) *Базисом обычного трёхмерного пространства является произвольная тройка некомпланарных векторов этого пространства.*

Доказательство. а) Пара неколлинеарных векторов плоскости линейно независима в силу замечания о линейной зависимости на плоскости (см. § IV.1) и является системой образующих плоскости в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости.

б) Это утверждение доказывается вполне аналогично предыдущему. □

Приведем пример базиса в пространстве строк F^n . В § IV.1 были введены в рассмотрение вектора

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

3-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства F^n .

Доказательство. В силу 1-го и 2-го замечаний о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ (см. § IV.1) вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы и являются системой образующих пространства F^n . □

Приведем пример базиса в пространстве строк F^n . В § IV.1 были введены в рассмотрение вектора

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

3-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства F^n .

Доказательство. В силу 1-го и 2-го замечаний о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ (см. § IV.1) вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы и являются системой образующих пространства F^n . □

Определение

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называется *стандартным базисом* пространства F^n .

Как обсуждалось в § IV.1, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ линейно независима.

Как обсуждалось в § IV.1, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ линейно независима. По определению многочлена система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ является системой образующих для пространства $F[x]$. Итак, $\{x^n\}_{n \geq 0}$ — базис пространства $F[x]$.

Как обсуждалось в § IV.1, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ линейно независима. По определению многочлена система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ является системой образующих для пространства $F[x]$. Итак, $\{x^n\}_{n \geq 0}$ — базис пространства $F[x]$.

В пространстве функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} тоже есть бесконечные линейно независимые системы, например, $\{\sin nx, \cos nx\}_{n > 0}$. На самом деле, в этом пространстве есть и (бесконечный) базис, но явно выписать его трудно.

Как обсуждалось в § IV.1, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ линейно независима. По определению многочлена система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ является системой образующих для пространства $F[x]$. Итак, $\{x^n\}_{n \geq 0}$ — базис пространства $F[x]$.

В пространстве функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} тоже есть бесконечные линейно независимые системы, например, $\{\sin nx, \cos nx\}_{n > 0}$. На самом деле, в этом пространстве есть и (бесконечный) базис, но явно выписать его трудно.

В пространстве $F^{k \times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над полем F базис образуют всевозможные матричные единицы E_{ij} , где $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq n$.

Как обсуждалось в § IV.1, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ линейно независима. По определению многочлена система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ является системой образующих для пространства $F[x]$. Итак, $\{x^n\}_{n \geq 0}$ — базис пространства $F[x]$.

В пространстве функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} тоже есть бесконечные линейно независимые системы, например, $\{\sin nx, \cos nx\}_{n > 0}$. На самом деле, в этом пространстве есть и (бесконечный) базис, но явно выписать его трудно.

В пространстве $F^{k \times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над полем F базис образуют всевозможные матричные единицы E_{ij} , где $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq n$.

В поле комплексных чисел \mathbb{C} , рассматриваемом как векторное пространство над полем \mathbb{R} , базис составляют числа 1 и i .

Как обсуждалось в § IV.1, в пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы. Естественно назвать *бесконечную* последовательность векторов линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Тогда система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ линейно независима. По определению многочлена система $\{x^n\}_{n \geq 0}$ является системой образующих для пространства $F[x]$. Итак, $\{x^n\}_{n \geq 0}$ — базис пространства $F[x]$.

В пространстве функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} тоже есть бесконечные линейно независимые системы, например, $\{\sin nx, \cos nx\}_{n > 0}$. На самом деле, в этом пространстве есть и (бесконечный) базис, но явно выписать его трудно.

В пространстве $F^{k \times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над полем F базис образуют всевозможные матричные единицы E_{ij} , где $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq n$.

В поле комплексных чисел \mathbb{C} , рассматриваемом как векторное пространство над полем \mathbb{R} , базис составляют числа 1 и i .

У нулевого пространства базиса нет, поскольку в этом пространстве нет линейно независимых систем.

Видим разнородную картину: в некоторых из знакомых нам пространств есть конечные базисы, в некоторых есть бесконечные базисы, а у нулевого пространства базиса нет.

Видим разнородную картину: в некоторых из знакомых нам пространств есть конечные базисы, в некоторых есть бесконечные базисы, а у нулевого пространства базиса нет.

Что можно сказать о существовании базиса в общем случае? В этом курсе мы ограничимся следующим результатом.

Теорема о существовании конечного базиса

Если в ненулевом векторном пространстве V есть конечная система образующих, то в V есть и конечный базис.

Что можно сказать о существовании базиса в общем случае? В этом курсе мы ограничимся следующим результатом.

Теорема о существовании конечного базиса

Если в ненулевом векторном пространстве V есть конечная система образующих, то в V есть и конечный базис.

Доказательство. Пусть Σ — конечная система образующих пространства V . Поскольку V — ненулевое пространство, в Σ есть ненулевые вектора. Выкинем из Σ нулевой вектор, если он там был; получившаяся система ненулевых векторов $\Sigma_1 := \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$ тоже будет системой образующих. Если система Σ_1 линейно независима, то она является базисом и всё доказано. Если система Σ_1 линейно зависима, то по лемме о правом крайнем в ней найдется вектор \mathbf{a}_1 , который линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma_2 := \Sigma_1 \setminus \{\mathbf{a}_1\}$. По лемме о прополке Σ_2 остаётся системой образующих.

Что можно сказать о существовании базиса в общем случае? В этом курсе мы ограничимся следующим результатом.

Теорема о существовании конечного базиса

Если в ненулевом векторном пространстве V есть конечная система образующих, то в V есть и конечный базис.

Доказательство. Пусть Σ — конечная система образующих пространства V . Поскольку V — ненулевое пространство, в Σ есть ненулевые вектора. Выкинем из Σ нулевой вектор, если он там был; получившаяся система ненулевых векторов $\Sigma_1 := \Sigma \setminus \{0\}$ тоже будет системой образующих. Если система Σ_1 линейно независима, то она является базисом и всё доказано. Если система Σ_1 линейно зависима, то по лемме о правом крайнем в ней найдется вектор \mathbf{a}_1 , который линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma_2 := \Sigma_1 \setminus \{\mathbf{a}_1\}$. По лемме о прополке Σ_2 остаётся системой образующих. Понятно, что тот же самый аргумент применим к Σ_2 : если Σ_2 линейно независима, то всё доказано, а если линейно зависима, то из Σ_2 можно удалить вектор так, чтобы уменьшенная система осталась системой образующих.

Что можно сказать о существовании базиса в общем случае? В этом курсе мы ограничимся следующим результатом.

Теорема о существовании конечного базиса

Если в ненулевом векторном пространстве V есть конечная система образующих, то в V есть и конечный базис.

Доказательство. Пусть Σ — конечная система образующих пространства V . Поскольку V — ненулевое пространство, в Σ есть ненулевые вектора. Выкинем из Σ нулевой вектор, если он там был; получившаяся система ненулевых векторов $\Sigma_1 := \Sigma \setminus \{0\}$ тоже будет системой образующих. Если система Σ_1 линейно независима, то она является базисом и всё доказано. Если система Σ_1 линейно зависима, то по лемме о правом крайнем в ней найдется вектор \mathbf{a}_1 , который линейно выражается через какие-то вектора из $\Sigma_2 := \Sigma_1 \setminus \{\mathbf{a}_1\}$. По лемме о прополке Σ_2 остаётся системой образующих. Понятно, что тот же самый аргумент применим к Σ_2 : если Σ_2 линейно независима, то всё доказано, а если линейно зависима, то из Σ_2 можно удалить вектор так, чтобы уменьшенная система осталась системой образующих. Этот процесс остановится, лишь достигнув линейно независимой системы образующих, т.е. базиса. Число векторов в текущей системе уменьшается на каждом шаге процесса, а потому остановка неизбежна. □

1. Очевидно, что верно и обратное к теореме утверждение.

1. Очевидно, что верно и обратное к теореме утверждение.
2. Доказательство довольно поучительно, и мы будем использовать похожие механизмы и в некоторых других доказательствах.

1. Очевидно, что верно и обратное к теореме утверждение.
2. Доказательство довольно поучительно, и мы будем использовать похожие механизмы и в некоторых других доказательствах.
3. Альтернативное оформление доказательства может быть таким: возьмём в качестве Σ систему образующих пространства V с наименьшим возможным числом векторов. Тогда в Σ нет нулевого вектора и нет вектора, линейно выражающегося через другие вектора системы Σ (иначе его можно было бы выкинуть по лемме о прополке и придти к противоречию с минимальностью Σ). По лемме о правом крайнем система Σ линейно независима, т.е. является базисом.

1. Очевидно, что верно и обратное к теореме утверждение.
2. Доказательство довольно поучительно, и мы будем использовать похожие механизмы и в некоторых других доказательствах.
3. Альтернативное оформление доказательства может быть таким: возьмём в качестве Σ систему образующих пространства V с наименьшим возможным числом векторов. Тогда в Σ нет нулевого вектора и нет вектора, линейно выражающегося через другие вектора системы Σ (иначе его можно было бы выкинуть по лемме о прополке и придти к противоречию с минимальностью Σ). По лемме о правом крайнем система Σ линейно независима, т.е. является базисом.
4. В общем случае можно доказать, что в *любом* ненулевом векторном пространстве есть базис, но доказательство использует один нетривиальный факт из теории множеств (лемма Цорна).

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Доказательство. Пусть $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис пространства, а $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — другой его базис. Чтобы доказать, что $n = k$, в силу симметрии достаточно проверить, что $k \leq n$.

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Доказательство. Пусть $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис пространства, а $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — другой его базис. Чтобы доказать, что $n = k$, в силу симметрии достаточно проверить, что $k \leq n$. Пусть $k > n$. Рассмотрим

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (1)$$

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Доказательство. Пусть $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис пространства, а $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — другой его базис. Чтобы доказать, что $n = k$, в силу симметрии достаточно проверить, что $k \leq n$. Пусть $k > n$. Рассмотрим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (1)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_1 выражается через систему образующих A .

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Доказательство. Пусть $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис пространства, а $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — другой его базис. Чтобы доказать, что $n = k$, в силу симметрии достаточно проверить, что $k \leq n$. Пусть $k > n$. Рассмотрим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (1)$$

Это линейно зависимая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_1 выражается через систему образующих A . По лемме о правом крайнем в (1) есть вектор, который линейно выражается через предыдущие. Это не может быть вектор \mathbf{b}_1 — у него нет предыдущих. Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_i .

Теорема о равномощности базисов

Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно n векторов.

Доказательство. Пусть $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис пространства, а $B := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — другой его базис. Чтобы доказать, что $n = k$, в силу симметрии достаточно проверить, что $k \leq n$. Пусть $k > n$. Рассмотрим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (1)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_1 выражается через систему образующих A . По лемме о правом крайнем в (1) есть вектор, который линейно выражается через предыдущие. Это не может быть вектор \mathbf{b}_1 — у него нет предыдущих. Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j . Выкинув его из (1), получим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (2)$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке.

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \underbrace{\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n}_{(2)}. \quad (3)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2).

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависимая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима).

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависимая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j при $j \neq i$.

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j при $j \neq i$. Выкинув его из (3), получим систему

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (4)$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке.

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j при $j \neq i$. Выкинув его из (3), получим систему

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (4)$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке. Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (5)$$

и т.д.

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j при $j \neq i$. Выкинув его из (3), получим систему

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (4)$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке. Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (5)$$

и т.д. Продолжая добавлять вектора из B и удалять вектора из A , будем получать системы из n образующих, в которых всё больше векторов из B и всё меньше — из A («чай с ромом по-матроски»).

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j при $j \neq i$. Выкинув его из (3), получим систему

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (4)$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке. Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (5)$$

и т.д. Продолжая добавлять вектора из B и удалять вектора из A , будем получать системы из n образующих, в которых всё больше векторов из B и всё меньше — из A . Поскольку $k > n$, через n шагов придем к системе образующих $\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1$.

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n. \quad (3)$$

Это линейно зависящая система ненулевых векторов, так как вектор \mathbf{b}_2 выражается через систему образующих (2). По лемме о правом крайнем в (3) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни \mathbf{b}_2 , ни \mathbf{b}_1 (у \mathbf{b}_2 нет предыдущих, а \mathbf{b}_1 не выражается через \mathbf{b}_2 , так как система B линейно независима). Значит, это какой-то вектор \mathbf{a}_j при $j \neq i$. Выкинув его из (3), получим систему

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (4)$$

которая останется системой образующих согласно лемме о прополке. Теперь рассмотрим

$$\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \quad (5)$$

и т.д. Продолжая добавлять вектора из B и удалять вектора из A , будем получать системы из n образующих, в которых всё больше векторов из B и всё меньше — из A . Поскольку $k > n$, через n шагов придем к системе образующих $\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1$. Но тогда вектор \mathbf{b}_{n+1} выражается через эту систему образующих, что противоречит линейной независимости B . \square

Анализ показывает, что доказано *больше*, чем утверждает теорема.

Анализ показывает, что доказано *больше*, чем утверждает теорема. Хотя в начале доказательства было сказано, что A и B — базисы, в ключевом рассуждении использовалось только то, что A — система ненулевых образующих, а B — линейно независимая система.

Анализ показывает, что доказано *больше*, чем утверждает теорема. Хотя в начале доказательства было сказано, что A и B — базисы, в ключевом рассуждении использовалось только то, что A — система ненулевых образующих, а B — линейно независимая система. Именно исходя из этого, доказывалось, что число векторов в A не может быть меньше числа векторов в B .

Анализ показывает, что доказано *больше*, чем утверждает теорема. Хотя в начале доказательства было сказано, что A и B — базисы, в ключевом рассуждении использовалось только то, что A — система ненулевых образующих, а B — линейно независимая система. Именно исходя из этого, доказывалось, что число векторов в A не может быть меньше числа векторов в B . Поэтому справедливы такие:

Следствия доказательства теоремы о равномощности

1. Если у векторного пространства V есть система из n образующих, то любая линейно независимая система в V содержит не больше n векторов.
2. Если в V есть линейно независимая система из n векторов, то любая система образующих пространства V содержит не менее n векторов.

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V .

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V .
Как только что отмечено, $k \leq n$.

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V . Как только что отмечено, $k \leq n$. Если «прополоть» систему образующих

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n,$$

последовательно удаляя вектора, выражающиеся через предыдущие, до тех пор, пока это возможно, то ни один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ не будет удалён — ведь ни один из них не выражается через предыдущие.

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V .

Как только что отмечено, $k \leq n$. Если «прополоть» систему образующих

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n,$$

последовательно удаляя вектора, выражающиеся через предыдущие, до тех пор, пока это возможно, то ни один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ не будет удалён — ведь ни один из них не выражается через предыдущие. При этом система останется системой образующих и станет линейно независимой, т.е. базисом в точности после $n - k$ удалений по теореме о равномощности базисов.

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V . Как только что отмечено, $k \leq n$. Если «прополоть» систему образующих

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n,$$

последовательно удаляя вектора, выражающиеся через предыдущие, до тех пор, пока это возможно, то ни один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ не будет удалён — ведь ни один из них не выражается через предыдущие. При этом система останется системой образующих и станет линейно независимой, т.е. базисом в точности после $n - k$ удалений по теореме о равносильности базисов. В результате получится базис, содержащий вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$.

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V . Как только что отмечено, $k \leq n$. Если «прополоть» систему образующих

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n,$$

последовательно удаляя вектора, выражающиеся через предыдущие, до тех пор, пока это возможно, то ни один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ не будет удалён — ведь ни один из них не выражается через предыдущие. При этом система останется системой образующих и станет линейно независимой, т.е. базисом в точности после $n - k$ удалений по теореме о равносильности базисов. В результате получится базис, содержащий вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$. Итак, установлена

Теорема о продолжении

В пространстве с конечным базисом каждая линейно независимая система может быть дополнена до базиса.

Пусть теперь $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ — базис некоторого векторного пространства V , а $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$ — линейно независимая система векторов из V . Как только что отмечено, $k \leq n$. Если «прополоть» систему образующих

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n,$$

последовательно удаляя вектора, выражающиеся через предыдущие, до тех пор, пока это возможно, то ни один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ не будет удалён — ведь ни один из них не выражается через предыдущие. При этом система останется системой образующих и станет линейно независимой, т.е. базисом в точности после $n - k$ удалений по теореме о равносильности базисов. В результате получится базис, содержащий вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$. Итак, установлена

Теорема о продолжении

В пространстве с конечным базисом каждая линейно независимая система может быть дополнена до базиса.

В действительности, теорема о продолжении верна для любых векторных пространств, но доказательство этого опирается на средства, выходящие за рамки данного курса (лемму Цорна).

Теорема о равносильности базисов делает корректным следующее

Определение

Если у векторного пространства есть конечный базис, то число векторов в базисе называется *размерностью* этого пространства.

Размерность пространства V обозначается через $\dim V$.

Теорема о равносильности базисов делает корректным следующее

Определение

Если у векторного пространства есть конечный базис, то число векторов в базисе называется *размерностью* этого пространства.

Размерность пространства V обозначается через $\dim V$.

Размерность нулевого пространства по определению есть 0. Если $\dim V = n$, пространство V называют *n -мерным*.

Теорема о равносильности базисов делает корректным следующее

Определение

Если у векторного пространства есть конечный базис, то число векторов в базисе называется *размерностью* этого пространства.

Размерность пространства V обозначается через $\dim V$.

Размерность нулевого пространства по определению есть 0. Если $\dim V = n$, пространство V называют *n -мерным*. *Конечномерным* называют пространство, которое n -мерно для какого-то $n \geq 0$; *бесконечномерным* — пространство, в котором есть бесконечные линейно независимые системы.

Теорема о равносильности базисов делает корректным следующее

Определение

Если у векторного пространства есть конечный базис, то число векторов в базисе называется *размерностью* этого пространства. Размерность пространства V обозначается через $\dim V$.

Размерность нулевого пространства по определению есть 0. Если $\dim V = n$, пространство V называют *n -мерным*. *Конечномерным* называют пространство, которое n -мерно для какого-то $n \geq 0$; *бесконечномерным* — пространство, в котором есть бесконечные линейно независимые системы.

В нашем курсе рассматриваются *конечномерные пространства* (за исключением отдельных примеров на следующем слайде). По умолчанию слово «пространство» далее означает «конечномерное пространство».

Обычное трёхмерное пространство аналитической геометрии трёхмерно и в нашем смысле. Плоскость двумерна, а прямая одномерна.

Обычное трёхмерное пространство аналитической геометрии трёхмерно и в нашем смысле. Плоскость двумерна, а прямая одномерна.

Поскольку стандартный базис пространства строк F^n состоит из n векторов, $\dim F^n = n$. В частности, пространство F^4 четырёхмерно.

Обычное трёхмерное пространство аналитической геометрии трёхмерно и в нашем смысле. Плоскость двумерна, а прямая одномерна.

Поскольку стандартный базис пространства строк F^n состоит из n векторов, $\dim F^n = n$. В частности, пространство F^4 четырёхмерно.

Пространство многочленов $F[x]$ и пространство функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} бесконечномерны. Пространство $F_n[x]$ всех многочленов степени не выше n имеет размерность $n + 1$ (базис $F_n[x]$ состоит из многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$).

Обычное трёхмерное пространство аналитической геометрии трёхмерно и в нашем смысле. Плоскость двумерна, а прямая одномерна.

Поскольку стандартный базис пространства строк F^n состоит из n векторов, $\dim F^n = n$. В частности, пространство F^4 четырёхмерно.

Пространство многочленов $F[x]$ и пространство функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} бесконечномерны. Пространство $F_n[x]$ всех многочленов степени не выше n имеет размерность $n + 1$ (базис $F_n[x]$ состоит из многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$).

Поскольку kn матричных единиц E_{ij} , где $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq n$, образуют базис пространства $F^{k \times n}$ всех $k \times n$ -матриц, $\dim F^{k \times n} = kn$. В частности, пространство всех 2×2 -матриц четырёхмерно.

Обычное трёхмерное пространство аналитической геометрии трёхмерно и в нашем смысле. Плоскость двумерна, а прямая одномерна.

Поскольку стандартный базис пространства строк F^n состоит из n векторов, $\dim F^n = n$. В частности, пространство F^4 четырёхмерно.

Пространство многочленов $F[x]$ и пространство функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} бесконечномерны. Пространство $F_n[x]$ всех многочленов степени не выше n имеет размерность $n + 1$ (базис $F_n[x]$ состоит из многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$).

Поскольку kn матричных единиц E_{ij} , где $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq n$, образуют базис пространства $F^{k \times n}$ всех $k \times n$ -матриц, $\dim F^{k \times n} = kn$. В частности, пространство всех 2×2 -матриц четырёхмерно.

Поле комплексных чисел \mathbb{C} , рассматриваемое как векторное пространство над полем \mathbb{R} , двумерно.

Следующее утверждение является точным аналогом теорем о разложении вектора по базису на плоскости и в трёхмерном пространстве, доказанных в первой теме курса.

Теорема о разложении вектора по базису

Пусть V — ненулевое векторное пространство, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис этого пространства и $\mathbf{x} \in V$. Тогда существуют, и притом единственные, скаляры t_1, t_2, \dots, t_n такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n. \quad (*)$$

Следующее утверждение является точным аналогом теорем о разложении вектора по базису на плоскости и в трёхмерном пространстве, доказанных в первой теме курса.

Теорема о разложении вектора по базису

Пусть V — ненулевое векторное пространство, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис этого пространства и $\mathbf{x} \in V$. Тогда существуют, и притом единственные, скаляры t_1, t_2, \dots, t_n такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n. \quad (*)$$

Доказательство. Существование коэффициентов t_1, t_2, \dots, t_n ясно, поскольку базис — это система образующих. Осталось доказать единственность. Предположим, что наравне с равенством (*) выполнено равенство $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_n\mathbf{a}_n$ для некоторых скаляров s_1, s_2, \dots, s_n . Вычтем последнее равенство из (*). Получим

$$(t_1 - s_1)\mathbf{a}_1 + (t_2 - s_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (t_n - s_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, получаем $t_i - s_i = 0$, т. е. $t_i = s_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. □

Следующее утверждение является точным аналогом теорем о разложении вектора по базису на плоскости и в трёхмерном пространстве, доказанных в первой теме курса.

Теорема о разложении вектора по базису

Пусть V — ненулевое векторное пространство, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис этого пространства и $\mathbf{x} \in V$. Тогда существуют, и притом единственные, скаляры t_1, t_2, \dots, t_n такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n. \quad (*)$$

Определение

Равенство (*) называется *разложением вектора \mathbf{x} по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$* . Скаляры t_1, t_2, \dots, t_n называются *координатами* вектора \mathbf{x} в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тот факт, что вектор \mathbf{x} имеет в некотором базисе координаты t_1, t_2, \dots, t_n записывается так: $\mathbf{x} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Следующее утверждение является аналогом замечания о координатах векторов $\vec{x} + \vec{y}$ и $t\vec{x}$ из первой темы курса.

Координаты суммы векторов и произведения вектора на скаляр

Пусть V — векторное пространство, $x, y \in V$, а t — произвольный скаляр. Если в некотором базисе a_1, a_2, \dots, a_n вектор x имеет координаты (x_1, x_2, \dots, x_n) , а вектор y — координаты (y_1, y_2, \dots, y_n) , то вектор $x + y$ имеет в том же базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, а вектор tx — координаты $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$.

Следующее утверждение является аналогом замечания о координатах векторов $\vec{x} + \vec{y}$ и $t\vec{x}$ из первой темы курса.

Координаты суммы векторов и произведения вектора на скаляр

Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, а t — произвольный скаляр. Если в некотором базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ вектор \mathbf{x} имеет координаты (x_1, x_2, \dots, x_n) , а вектор \mathbf{y} — координаты (y_1, y_2, \dots, y_n) , то вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, а вектор $t\mathbf{x}$ — координаты $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$.

Доказательство. По определению координат имеем

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Складывая эти два равенства, получаем, что

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{a}_n,$$

а умножая первое из них на скаляр t — что

$$t\mathbf{x} = t(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n) = tx_1\mathbf{a}_1 + tx_2\mathbf{a}_2 + \dots + tx_n\mathbf{a}_n. \quad \square$$

Определение

Векторные пространства V_1 и V_2 над одним и тем же полем F *изоморфны*, если существует биекция f из V_1 на V_2 (называемая *изоморфизмом*) такая, что f *сохраняет операции*, т.е.

$$\forall x_1, x_2 \in V_1 \quad \forall t \in F \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \& \quad f(tx) = t \cdot f(x).$$

Определение

Векторные пространства V_1 и V_2 над одним и тем же полем F *изоморфны*, если существует биекция f из V_1 на V_2 (называемая *изоморфизмом*) такая, что f *сохраняет операции*, т.е.

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1 \quad \forall t \in F \quad f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \quad \& \quad f(t\mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}).$$

Теорема об изоморфизме векторных пространств

Любое n -мерное векторное пространство V над полем F изоморфно пространству F^n .

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V , $\mathbf{b} \in V$, а (t_1, t_2, \dots, t_n) — координаты вектора \mathbf{b} в этом базисе. Определим отображение $f: V \rightarrow F^n$ правилом: $f(\mathbf{b}) := (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Из единственности разложения вектора по базису вытекает, что отображение f инъективно. Сюръективность этого отображения очевидна: если $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in F^n$, то $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_n\mathbf{a}_n$. Наконец, сохранение операций вытекает из замечания о координатах суммы векторов и произведения вектора на скаляр. Таким образом, f — изоморфизм из V на F^n . □

Теорема об изоморфизме векторных пространств показывает, насколько важной характеристикой векторного пространства является его размерность. С точки зрения действия алгебраических операций размерность конечномерного векторного пространства однозначно определяет это пространство: для всякого n существует (с точностью до изоморфизма) лишь одно n -мерное векторное пространство над данным полем F — пространство F^n . Этим и объясняется упоминавшаяся в предыдущем параграфе особая роль пространства F^n в линейной алгебре.