Тема IV: Векторные пространства

§ 1. Линейная зависимость и независимость векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Определения

Пусть F — произвольное поле. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* над полем F называется произвольное непустое множество V, на котором заданы бинарная операция сложения и для каждого элемента $t \in F$ унарная операция умножения на t, удовлетворяющие следующим *аксиомами векторного пространства*:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (сложение *коммутативно*);
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (сложение *ассоциативно*);
3) $\exists \mathbf{0} \in V \ \ \forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (существование *нуля*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \ \ \exists \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (существование *противоположного*);
5) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ \ \forall t \in F \quad t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y}$;
6) $\forall \mathbf{x} \in V \ \ \forall t, s \in F \quad (t + s)\mathbf{x} = t\mathbf{x} + s\mathbf{x}$;
7) $\forall \mathbf{x} \in V \ \ \forall t, s \in F \quad t(s\mathbf{x}) = (ts)\mathbf{x}$;
8) $\forall \mathbf{x} \in V \quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Элементы множества V называются *векторами*. Поле F называют *основным* полем, а его элементы иногда называют *скалярами*.

Единственность в аксиомах 3) и 4)

Как показывают аксиомы 1)–4), относительно сложения любое векторное пространство — абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Он единствен: если вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяют аксиоме 3), то

$$\mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 \overset{1)}{=} \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_2.$$

Как показывают аксиомы 1)–4), относительно сложения любое векторное пространство — абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Он единствен: если вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяют аксиоме 3), то

$$\mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 \overset{1)}{=} \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_2.$$

Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{x}$, также единствен. Если вектора $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ удовлетворяют $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, то

$$\mathbf{y} \overset{3)}{=} \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} + \mathbf{z}) \overset{2)}{=} (\mathbf{y} + \mathbf{x}) + \mathbf{z} \overset{1)}{=} \mathbf{z} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z} + \mathbf{0} \overset{3)}{=} \mathbf{z}.$$

Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{x}$, обозначается через $-\mathbf{x}$.

Единственность в аксиомах 3) и 4)

Как показывают аксиомы 1)–4), относительно сложения любое векторное пространство — абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Он единствен: если вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяют аксиоме 3), то

$$\mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 \overset{1)}{=} \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_2.$$

Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{x}$, также единствен. Если вектора $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ удовлетворяют $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, то

$$\mathbf{y} \overset{3)}{=} \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} + \mathbf{z}) \overset{2)}{=} (\mathbf{y} + \mathbf{x}) + \mathbf{z} \overset{1)}{=} \mathbf{z} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z} + \mathbf{0} \overset{3)}{=} \mathbf{z}.$$

Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{x}$, обозначается через $-\mathbf{x}$.

Вычитание векторов определяется так: $\mathbf{y} - \mathbf{x} := \mathbf{y} + (-\mathbf{x})$.

Пример 1. Пусть V — множество всех обычных («геометрических») векторов трехмерного физического пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на (действительное) число. Все аксиомы векторного пространства в этом случае выполнены; в частности, роль нулевого вектора $\mathbf{0}$ играет вектор $\vec{0}$. Поэтому V является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Векторным пространством над $\mathbb{R}$ будет также множество всех векторов (в обычном смысле этого слова), коллинеарных некоторой плоскости или некоторой прямой.

- Таким образом, свойства векторов в векторном пространстве являются обобщением свойств обычных, «геометрических» векторов. Именно этим и объясняется и термин «векторное пространство», и использование термина «вектор» применительно к элементам произвольного векторного пространства.

Пример 2. Пусть F — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число. Обозначим через F^n множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. На множестве F^n введем операции сложения и умножения на скаляр. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F^n$, а $t \in F$. Положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{и} \quad t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Легко проверяется, что множество F^n с такими операциями является векторным пространством (роль нулевого вектора играет $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0)$). Это пространство называют *пространством строк длины n над полем F* или просто *пространством строк*. Мы вскоре увидим, что оно играет особую роль в теории векторных пространств.

Пример 2. Пусть F — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число. Обозначим через F^n множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$. На множестве F^n введем операции сложения и умножения на скаляр. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F^n$, а $t \in F$. Положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{и} \quad t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n).$$

Легко проверяется, что множество F^n с такими операциями является векторным пространством (роль нулевого вектора играет $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$). Это пространство называют *пространством строк длины n над полем F* или просто *пространством строк*. Мы вскоре увидим, что оно играет особую роль в теории векторных пространств.

- Пространство F_1, т. е. множество всех последовательностей вида (x_1), где $x_1 \in F$, естественно отождествить с полем F. Итак, любое поле можно рассматривать как векторное пространство над самим собой. Нулевым вектором этого пространства является нуль поля.

При $n = 1, 2, 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору $\vec{x}$ из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3) — координат вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Геометрическая интерпретация пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \leqslant 3$

При $n = 1, 2, 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору $\vec{x}$ из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3) — координат вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Эта тройка чисел является элементом пространства $\mathbb{R}^3$. Отображение f из обычного трехмерного пространства в пространство $\mathbb{R}^3$, заданное правилом $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$, является *изоморфизмом*, т.е. оно взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения на действительное число:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \text{и} \quad f(t\vec{x}) = tf(\vec{x})$$

для всех векторов $\vec{x}, \vec{y}$ и всех скаляров $t \in \mathbb{R}$.

При $n = 1, 2, 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору $\vec{x}$ из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3) — координат вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Эта тройка чисел является элементом пространства $\mathbb{R}^3$. Отображение f из обычного трехмерного пространства в пространство $\mathbb{R}^3$, заданное правилом $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$, является *изоморфизмом*, т.е. оно взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения на действительное число:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \text{и} \quad f(t\vec{x}) = tf(\vec{x})$$

для всех векторов $\vec{x}, \vec{y}$ и всех скаляров $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом,

!! *пространство $\mathbb{R}^3$ изоморфно обычному («физическому») трехмерному пространству.*
Аналогично, пространство $\mathbb{R}^2$ изоморфно плоскости, а пространство $\mathbb{R}^1$ — прямой в обычном трехмерном пространстве.

Пример 3. Рассмотрим множество $F[x]$ всех многочленов от переменной x над полем F,

$$F[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 : a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in F\}.$$

Оно будет векторным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на скаляр. Все аксиомы векторного пространства легко проверяются (роль нулевого вектора при этом играет многочлен 0). Таким образом, множество $F[x]$ является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Для всякого натурального n обозначим через $F_n[x]$ множество всех многочленов степени $\leqslant n$ над полем F. Ясно, что $F_n[x]$ также будет векторным пространством относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляры из F.

Пример 3. Рассмотрим множество $F[x]$ всех многочленов от переменной x над полем F,

$$F[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 : a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in F\}.$$

Оно будет векторным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на скаляр. Все аксиомы векторного пространства легко проверяются (роль нулевого вектора при этом играет многочлен 0). Таким образом, множество $F[x]$ является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Для всякого натурального n обозначим через $F_n[x]$ множество всех многочленов степени $\leqslant n$ над полем F. Ясно, что $F_n[x]$ также будет векторным пространством относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляры из F.

Пример 4. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если f и g — две функции, а $t \in \mathbb{R}$, то $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ и $(tf)(x) := t \cdot f(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства (в качестве нулевого вектора выступает функция, значение которой при любом x равно 0). Это векторное пространство называется *пространством функций*.

Пример 5. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел относительно операций сложения комплексных чисел и умножения комплексного числа на действительное. Все аксиомы векторного пространства сразу следуют из аксиом поля.

Примеры: пространство матриц

Пусть F — поле, а k и n — натуральные числа. *Матрица размера* $k \times n$ над F — это прямоугольная таблица с k строками и n столбцами, заполненная элементами из F:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{k\times n}.$$

Такие матрицы складывают и умножают на элементы из F покомпонентно:

$$(a_{ij})_{k\times n} + (b_{ij})_{k\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{k\times n}, \quad t(a_{ij})_{k\times n} := (ta_{ij})_{k\times n}.$$

Пусть F — поле, а k и n — натуральные числа. *Матрица размера* $k \times n$ над F — это прямоугольная таблица с k строками и n столбцами, заполненная элементами из F:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{k\times n}.$$

Такие матрицы складывают и умножают на элементы из F покомпонентно:

$$(a_{ij})_{k\times n} + (b_{ij})_{k\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{k\times n}, \quad t(a_{ij})_{k\times n} := (ta_{ij})_{k\times n}.$$

Пример 6. Множество $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над F является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матриц на скаляры из F. Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $k \times n$.

Пусть F — поле, а k и n — натуральные числа. *Матрица размера* $k \times n$ над F — это прямоугольная таблица с k строками и n столбцами, заполненная элементами из F:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{k\times n}.$$

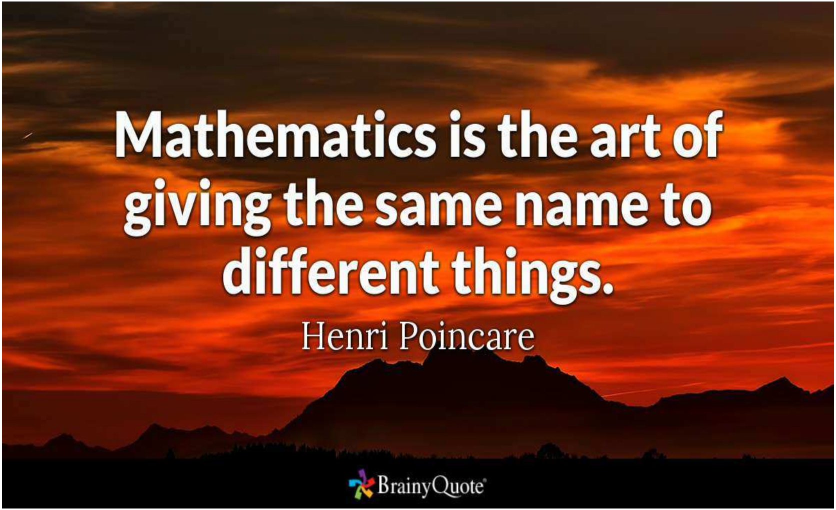
Такие матрицы складывают и умножают на элементы из F покомпонентно:

$$(a_{ij})_{k\times n} + (b_{ij})_{k\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{k\times n}, \quad t(a_{ij})_{k\times n} := (ta_{ij})_{k\times n}.$$

Пример 6. Множество $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над F является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матриц на скаляры из F. Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $k \times n$.

Отметим, что пространство строк F^n из примера 2 является специальным случаем пространства матриц $F^{k\times n}$ при $k = 1$.

Пример 7. Пусть V — произвольное множество, состоящее из одного элемента $\mathbf{a}$. Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр в таком множестве вводятся просто: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $t \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого t. Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются. Таким образом, V можно рассматривать как векторное пространство. При этом его единственный элемент $\mathbf{a}$ будет нулевым вектором. Такое пространство называется *нулевым*.


Mathematics is the art of giving the same name to different things.
Henri Poincare
BrainyQuote

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. □

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Имеем $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$. Добавляя $-0\mathbf{x}$ к обеим частям, получаем $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Имеем $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$. Добавляя $-0\mathbf{x}$ к обеим частям, получаем $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 3$ Если $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то либо $t = 0$, либо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. □

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Имеем $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$. Добавляя $-0\mathbf{x}$ к обеим частям, получаем $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

$\nabla 3$ Если $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то либо $t = 0$, либо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда имеем

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = (t^{-1}t)\mathbf{x} = t^{-1}(t\mathbf{x}) = t^{-1}\mathbf{0} \overset{\nabla 1}{=} \mathbf{0}.$$ □

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Имеем $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$. Добавляя $-0\mathbf{x}$ к обеим частям, получаем $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 3$ Если $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то либо $t = 0$, либо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда имеем

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = (t^{-1}t)\mathbf{x} = t^{-1}(t\mathbf{x}) = t^{-1}\mathbf{0} \overset{\nabla 1}{=} \mathbf{0}. \quad \square$$

$\nabla 4$ $(-t)\mathbf{x} = -t\mathbf{x}$ для всех $t \in F$ и $\mathbf{x} \in V$.

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.
Доказательство. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на t, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.
Доказательство. Имеем $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$. Добавляя $-0\mathbf{x}$ к обеим частям, получаем $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

$\nabla 3$ Если $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то либо $t = 0$, либо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Доказательство. Пусть $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда имеем

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = (t^{-1}t)\mathbf{x} = t^{-1}(t\mathbf{x}) = t^{-1}\mathbf{0} \overset{\nabla 1}{=} \mathbf{0}. \qquad \square$$

$\nabla 4$ $(-t)\mathbf{x} = -t\mathbf{x}$ для всех $t \in F$ и $\mathbf{x} \in V$.
Доказательство. Имеем

$$(-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x} = ((-t) + t)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} \overset{\nabla 2}{=} \mathbf{0}.$$

Добавляя $-t\mathbf{x}$ к обеим частям, имеем $(-t)\mathbf{x} = -t\mathbf{x}$. $\square$

Следующие понятия будут играть ключевую роль.

Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — система векторов из векторного пространства V над полем F, а $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Вектор вида

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k \qquad (1)$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы один из скаляров $t_1, t_2, \dots, t_k$ отличен от 0. Если вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, говорят, что $\mathbf{b}$ *линейно выражается* через вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Следующие понятия будут играть ключевую роль.

Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — система векторов из векторного пространства V над полем F, а $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Вектор вида

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k \qquad (1)$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы один из скаляров $t_1, t_2, \dots, t_k$ отличен от 0. Если вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, говорят, что $\mathbf{b}$ *линейно выражается* через вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы*, если некоторая нетривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, и *линейно независимы* в противном случае, т. е. если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору.

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^2$, а трехмерное физическое пространство — с пространством $\mathbb{R}^3$. Оказывается, что введенные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам понятиям.

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^2$, а трехмерное физическое пространство — с пространством $\mathbb{R}^3$. Оказывается, что введенные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам понятиям.

Замечание о линейной зависимости на плоскости и в пространстве

а) *Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

б) *Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^2$, а трехмерное физическое пространство — с пространством $\mathbb{R}^3$. Оказывается, что введенные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам понятиям.

Замечание о линейной зависимости на плоскости и в пространстве

а) *Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

б) *Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство. а) Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p и q, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b}$, и вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по критерию коллинеарности векторов. Предположим теперь, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то по критерию коллинеарности $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого t, т. е. $1 \cdot \vec{a} - t\vec{b} = \vec{0}$. В обоих случаях получаем, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

б) Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, то $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\vec{0}$ для некоторых скаляров p, q и r, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p\neq 0$. Тогда $\vec{a}=-\frac{q}{p}\cdot\vec{b}-\frac{r}{p}\cdot\vec{c}$. Это значит, что вектор $\vec{a}$ лежит в той плоскости, которой принадлежат вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и потому вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

б) Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, то $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\vec{0}$ для некоторых скаляров p, q и r, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p\neq 0$. Тогда $\vec{a}=-\frac{q}{p}\cdot\vec{b}-\frac{r}{p}\cdot\vec{c}$. Это значит, что вектор $\vec{a}$ лежит в той плоскости, которой принадлежат вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и потому вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Предположим теперь, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{c}=\vec{0}$, то $0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}=\vec{0}$. Если $\vec{c}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\parallel\vec{c}$, то по критерию коллинеарности векторов $\vec{b}=t\vec{c}$ для некоторого t, и потому $0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}-t\vec{c}=\vec{0}$. Наконец, если $\vec{b}\nparallel\vec{c}$, то вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис той плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{a}=s\vec{b}+t\vec{c}$ для некоторых скаляров s и t, откуда $1\cdot\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}=\vec{0}$. Во всех трех случаях получаем, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. $\square$

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F^n, которая будет многократно возникать в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F^n, которая будет многократно возникать в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

1-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F^n, которая будет многократно возникать в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

1-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Доказательство. Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. $\square$

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F^n, которая будет многократно возникать в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

1-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Доказательство. Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. □

В процессе доказательства этого замечания фактически доказано следующее полезное для дальнейшего утверждение.

2-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный вектор пространства F^n, то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$.

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему.

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему. Действительно, из равенства $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, следует, что $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, ведь нуль в пространстве многочленов — это многочлен, у которого все коэффициенты нулевые.

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему. Действительно, из равенства $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, следует, что $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, ведь нуль в пространстве многочленов — это многочлен, у которого все коэффициенты нулевые.

В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ линейно независимы, например, функции $\sin x$ и $\cos x$.

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему. Действительно, из равенства $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, следует, что $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, ведь нуль в пространстве многочленов — это многочлен, у которого все коэффициенты нулевые.

В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ линейно независимы, например, функции $\sin x$ и $\cos x$. Действительно, если $a \sin x + b \cos x = 0$, то положив $x := \frac{\pi}{2}$, получим $a = 0$, а положив $x := 0$, получим $b = 0$.

Примеры линейно независимых систем многочленов и функций

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного n многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют линейно независимую систему. Действительно, из равенства $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, следует, что $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, ведь нуль в пространстве многочленов — это многочлен, у которого все коэффициенты нулевые.

В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ линейно независимы, например, функции $\sin x$ и $\cos x$. Действительно, если $a \sin x + b \cos x = 0$, то положив $x := \frac{\pi}{2}$, получим $a = 0$, а положив $x := 0$, получим $b = 0$.

На самом деле, в пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ для любого положительного n функции $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ образуют линейно независимую систему, но доказать это элементарными средствами трудно.

Пример линейно независимой системы матриц

В пространстве $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над полем F линейно независимую систему образуют *матричные единицы*, т.е. матрицы, у которых ровно один элемент равен 1, а все прочие элементы равны 0:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} := E_{ij}.$$

В пространстве $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k\times n$ над полем F линейно независимую систему образуют *матричные единицы*, т.е. матрицы, у которых ровно один элемент равен 1, а все прочие элементы равны 0:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} := E_{ij}.$$

Действительно, легко понять, что $\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = (a_{ij})_{k\times n}$, и если $(a_{ij})_{k\times n}$ — нулевая $k\times n$-матрица, то $a_{ij}=0$ для всех $i=1,\dots,k$ и $j=1,\dots,n$.

Пример линейно независимой системы матриц

В пространстве $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k\times n$ над полем F линейно независимую систему образуют *матричные единицы*, т.е. матрицы, у которых ровно один элемент равен 1, а все прочие элементы равны 0:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} := E_{ij}.$$

Действительно, легко понять, что $\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = (a_{ij})_{k\times n}$, и если $(a_{ij})_{k\times n}$ — нулевая $k\times n$-матрица, то $a_{ij}=0$ для всех $i=1,\dots,k$ и $j=1,\dots,n$.

Система матричных единиц, конечно, есть прямое обобщение линейно независимой системы $\mathbf{e}_1=(1,0,\dots,0), \mathbf{e}_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,\mathbf{e}_n=(0,\dots,0,1)$ в пространстве строк F^n.

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$, линейно независимы, например, числа 1 и i.

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$, линейно независимы, например, числа 1 и i. А вот в нулевом пространстве линейно независимых систем нет.

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$, линейно независимы, например, числа 1 и i.
А вот в нулевом пространстве линейно независимых систем нет.
На самом деле, верно более общее наблюдение:

Лемма о системе векторов, содержащей нулевой вектор

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *имеется нулевой вектор, то эти вектора линейно зависимы.*

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$, линейно независимы, например, числа 1 и i.
А вот в нулевом пространстве линейно независимых систем нет.
На самом деле, верно более общее наблюдение:

Лемма о системе векторов, содержащей нулевой вектор

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ имеется нулевой вектор, то эти вектора линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \qquad \square$$

Лемма о надсистеме линейно зависимой системы векторов

Если к линейно зависимой системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.*

Лемма о надсистеме линейно зависимой системы векторов

Если к линейно зависимой системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Доказательство. Пусть $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m$ — нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, равная нулевому вектору. Если добавить к этим векторам вектора $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$, то

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

Лемма о надсистеме линейно зависимой системы векторов

Если к линейно зависимой системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Доказательство. Пусть $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m$ — нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, равная нулевому вектору. Если добавить к этим векторам вектора $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$, то

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

Следствие о подсистеме линейно независимой системы векторов

Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Лемма о надсистеме линейно зависимой системы векторов

Если к линейно зависимой системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Доказательство. Пусть $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m$ — нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, равная нулевому вектору. Если добавить к этим векторам вектора $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$, то

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. □

Следствие о подсистеме линейно независимой системы векторов

Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Итак, свойство «быть линейно зависимой» наследуется «вверх», т.е. переносится на надсистемы, а свойство «быть линейно независимой» наследуется «вниз», т.е. переносится на подсистемы.

Признак линейной зависимости

Вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы, если один из них линейно выражается через остальные.*

Признак линейной зависимости

Вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, если один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство. Если вектор $\mathbf{a}_i$ линейно выражается через остальные, т. е. $\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + r_k\mathbf{a}_k$ для некоторых скаляров $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k$, то

$$r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - 1 \cdot \mathbf{a}_i + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

и потому вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

Лемма о правом крайнем

Если система ненулевых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависима, то в ней найдется вектор, который линейно выражается через предыдущие.*

Лемма о правом крайнем

Если система ненулевых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависима, то в ней найдется вектор, который линейно выражается через предыдущие.*

Доказательство. По условию существуют скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_k$, по крайней мере один из которых не равен 0, такие, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

Пусть j — наибольший индекс, для которого $t_j \neq 0$. Если $j = 1$, то равенство $(*)$ сводится к $t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, противоречие. Итак, $j > 1$ и равенство $(*)$ дает

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_{j-1}\mathbf{a}_{j-1} + t_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}.$$

Перенося последнее слагаемое в другую часть и деля на $t_j \neq 0$, получаем

$$\mathbf{a}_j = -\frac{t_1}{t_j} \cdot \mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{t_{j-1}}{t_j} \cdot \mathbf{a}_{j-1}. \qquad \square$$