Тема III: Комплексные числа

§ 3. Комплексные числа в тригонометрической форме

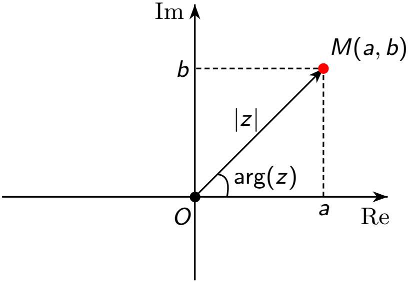
Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой $M(a, b)$ (см. рисунок). Тогда длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением действительной оси и отрезком OM называется *аргументом* числа z. *У числа* 0 *аргумент не определен.* Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а аргумент — через $\arg(z)$.



Модуль и аргумент комплексного числа

1. Для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает со стандартным понятием модуля (абсолютной величины).
2. Аргумент ненулевого комплексного числа определен неоднозначно: если φ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом k.

Свойства модуля комплексного числа

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) $|x| = |\overline{x}|$;
2) $x \cdot \overline{x} = |x|^2$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство. 1), 2) Пусть $x = a + bi$. Тогда

$$|\overline{x}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |x| \text{ и}$$
$$x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2.$$

3) Обозначим через A, B и C точки на плоскости, отвечающие числам x, y и $x + y$ соответственно при геометрической интерпретации комплексных чисел. Если точки A, B, O не лежат на одной прямой (левый рисунок на следующем слайде), то, поскольку длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, имеем

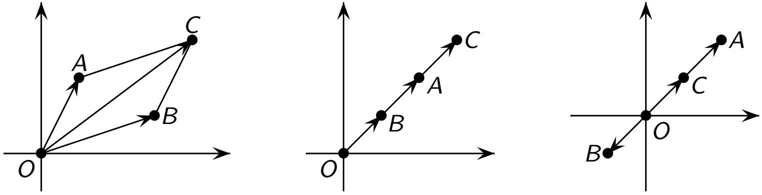
$$|x + y| = |OC| < |OA| + |AC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

Пусть теперь точки A, B и O лежат на одной прямой. Если A и B лежат по одну сторону от точки O (см. центральный рисунок), то, очевидно,

$$|x+y| = |OC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

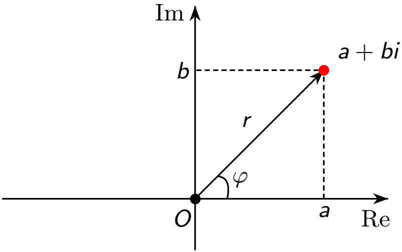
Пусть точки A и B лежат по разные стороны от точки O (см. правый рисунок). Без ограничения общности можно считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда точка C принадлежит отрезку OA, и потому

$$|x+y| = |OC| \leqslant |OA| = |x| \leqslant |x| + |y|.$$



Модуль суммы комплексных чисел

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, см. рисунок.



Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Определение

Если r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* этого числа.

Два замечания

1. Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.
2. Число 0 не имеет тригонометрической формы, так как у него не определен аргумент.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big] = \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big); \end{aligned}$$

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big] = \\
&= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big); \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).
\end{aligned}$$

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big] = \\
&= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).
\end{aligned}$$

Мы видим, что:

- *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов*;
- *модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного — разности аргументов z_1 и z_2.*

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме по индукции легко вывести, что

$$\bigl(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\bigr)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1)$$

для любого натурального n. Таким образом,

- *при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

Из формулы (1) при $r = 1$ получается равенство

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

известное как *формула Муавра*.

Комбинация формулы Муавра и формулы бинома Ньютона — неисчерпаемый источник комбинаторных и тригонометрических тождеств. Для примера выведем формулы, выражающие $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Имеем

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi + 10i^2\cos^3\varphi\sin^2\varphi + \\ &+ 10i^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5i^4\cos\varphi\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi = \\ &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ &- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + \\ &+ (5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i.\end{aligned}$$

С другой стороны, из формулы Муавра при $n = 5$ вытекает, что $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$. Следовательно,

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi \quad \text{и}$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

Перейдем к вопросу об извлечении корней произвольной натуральной степени из комплексных чисел. Прежде всего, дадим нужное определение.

Определение

Пусть n — натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Из определения не вытекает, что корень n-й степени из z существует. Тем более не ясно, сколько значений может он принимать, если существует. Вспомним, как обстоит дело в поле $\mathbb{R}$. Корень n-й степени из действительного числа x:

- существует и определен однозначно, если либо n нечетно, либо $x = 0$ (в последнем случае корень равен 0 независимо от n);
- существует и имеет ровно два (противоположных по знаку) значения, если n четно и $x > 0$;
- не существует, если n четно и $x < 0$.

В поле $\mathbb{C}$ все намного проще. Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n корень n-й степени из z в поле $\mathbb{C}$ существует и определен однозначно (а именно, равен 0). Если же $z \neq 0$, то, как мы сейчас докажем, для любого натурального n корень n-й степени из z в $\mathbb{C}$ существует и имеет ровно n различных значений.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — некоторое целое число. Поскольку q и r — положительные действительные числа, это означает, что $q = \sqrt[n]{r}$. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$. В частности, мы видим, что корень n-й степени из числа z всегда существует.

Выясним теперь, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Все корни n-й степени из числа z задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \tag{2}$$

где k — целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\frac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда k и ℓ имеют одинаковые остатки при делении на n. Поэтому все различные значения корня получаются по формуле (2) при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Таким образом,

- *если* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *— произвольное комплексное число, отличное от* 0, *а* n *— произвольное натуральное число, то корень* n*-й степени из* z *имеет ровно* n *различных значений, которые могут быть вычислены по формуле*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Таким образом,

- *если* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *— произвольное комплексное число, отличное от* 0, *а* n *— произвольное натуральное число, то корень* n*-й степени из* z *имеет ровно* n *различных значений, которые могут быть вычислены по формуле*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (3)$$

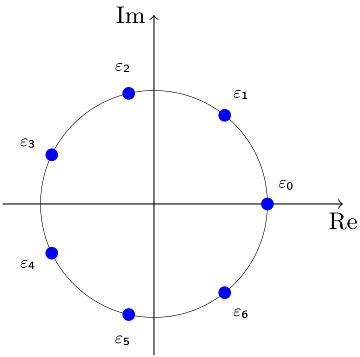
Отдельно выделим случай *корней из единицы*. Если $z = 1$, то $|z| = 1$, а $\arg z = 0$. Подставляя эти данные в (3), получаем следующий факт:

- *корень* n*-й степени из* 1 *имеет ровно* n *различных значений* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, *которые могут быть вычислены по формуле*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

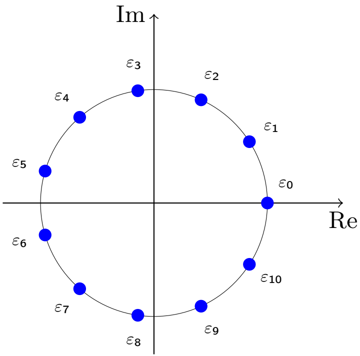
Корни n-й степени из 1 располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в *единичную окружность* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Корни n-й степени из 1 располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в *единичную окружность* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.



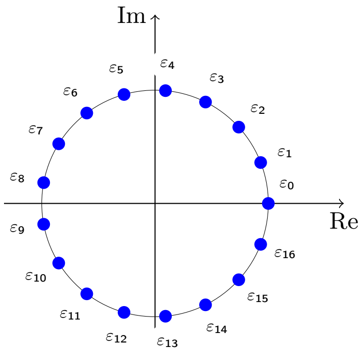
Корни 7-й степени из 1

Корни n-й степени из 1 располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в *единичную окружность* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.



Корни 11-й степени из 1

Корни n-й степени из 1 располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в *единичную окружность* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.



Корни 17-й степени из 1

Корни n-й степени из 1:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Произведение и частное двух корней n-й степени из 1 — снова корень n-й степени из 1. (Корни n-й степени из 1 образуют *группу*.)
2. Все корни n-й степени из 1 суть степени корня $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.
3. Сумма всех корней n-й степени из 1 равна 0.

Корни n-й степени из 1:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Произведение и частное двух корней n-й степени из 1 — снова корень n-й степени из 1. (Корни n-й степени из 1 образуют *группу*.)
2. Все корни n-й степени из 1 суть степени корня $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.
3. Сумма всех корней n-й степени из 1 равна 0.

Свойства 1 и 2 понятны; докажем свойство 3.

Свойства корней из 1

Корни n-й степени из 1:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Произведение и частное двух корней n-й степени из 1 — снова корень n-й степени из 1. (Корни n-й степени из 1 образуют *группу*.)
2. Все корни n-й степени из 1 суть степени корня $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.
3. Сумма всех корней n-й степени из 1 равна 0.

Свойства 1 и 2 понятны; докажем свойство 3.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_1^k = \frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{1-1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$$

Вспомним проблему, приведшую к необходимости рассмотрения комплексных чисел. Решая уравнение $x^3 - x = 0$ (корни которого, очевидно, суть $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$) по формуле Кардано

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

мы пришли к выражению

$$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Вспомним проблему, приведшую к необходимости рассмотрения комплексных чисел. Решая уравнение $x^3 - x = 0$ (корни которого, очевидно, суть $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$) по формуле Кардано

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

мы пришли к выражению

$$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Теперь мы можем разобраться со смыслом этого выражения.

$$\sqrt{-\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}i = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Вспомним проблему, приведшую к необходимости рассмотрения комплексных чисел. Решая уравнение $x^3 - x = 0$ (корни которого, очевидно, суть $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$) по формуле Кардано

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

мы пришли к выражению

$$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Теперь мы можем разобраться со смыслом этого выражения.

$$\sqrt{-\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}i = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Извлечем из числа $\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ кубический корень.

Три значения кубического корня из $\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2})$:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = -i\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Три значения кубического корня из
$\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{9\pi}{2}+i\sin\frac{9\pi}{2})$:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=-i\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично, три значения кубического корня из $-\sqrt{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}i=$
$=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{7\pi}{2}+i\sin\frac{7\pi}{2})=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{11\pi}{2}+i\sin\frac{11\pi}{2})$:

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6})=i\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$v_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Итак, имеем три значения для u и три значения для v:

$$u_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad v_1 = i\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad v_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$u_3 = -i\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad v_3 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Какие из них нужно скомбинировать, чтобы получить решение исходного уравнения $x^3 - x = 0$?

Итак, имеем три значения для u и три значения для v:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, & v_1 &= i\frac{1}{\sqrt{3}},\\
u_2 &= -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, & v_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}},\\
u_3 &= -i\frac{1}{\sqrt{3}}, & v_3 &= \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Какие из них нужно скомбинировать, чтобы получить решение исходного уравнения $x^3 - x = 0$? Вспомним: при выводе формулы Кардано на u и v налагалось условие $3uv + p = 0$. В нашем случае $p = -1$, т.е. $3uv = 1$.

Итак, имеем три значения для u и три значения для v:

$$u_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad v_1 = i\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$u_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad v_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$u_3 = -i\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad v_3 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Какие из них нужно скомбинировать, чтобы получить решение исходного уравнения $x^3 - x = 0$? Вспомним: при выводе формулы Кардано на u и v налагалось условие $3uv + p = 0$. В нашем случае $p = -1$, т.е. $3uv = 1$. Исходя из этого равенства, u_1 соответствует v_3, u_2 соответствует v_2, а u_3 соответствует v_1. Поэтому получаем три решения уравнения $x^3 - x = 0$:

$$x_1 = u_1 + v_3 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} = 1,$$
$$x_2 = u_2 + v_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} = -1,$$
$$x_3 = u_3 + v_1 = -i\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Вспомним, наши запросы к $\mathbb{C}$ были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел.

Заключительные замечания

Вспомним, наши запросы к $\mathbb{C}$ были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Внезапно обнаружилось, что в $\mathbb{C}$ можно извлекать корни *любой степени* из *любого комплексного числа*!

Вспомним, наши запросы к $\mathbb{C}$ были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Внезапно обнаружилось, что в $\mathbb{C}$ можно извлекать корни *любой степени* из *любого комплексного числа*!

Но поле комплексных чисел обладает гораздо более сильным свойством: в $\mathbb{C}$ есть корни у *алгебраического уравнения любой степени с произвольными комплексными коэффициентами*.

Заключительные замечания

Вспомним, наши запросы к $\mathbb{C}$ были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел.
Внезапно обнаружилось, что в $\mathbb{C}$ можно извлекать корни *любой степени* из *любого комплексного числа*!
Но поле комплексных чисел обладает гораздо более сильным свойством: в $\mathbb{C}$ есть корни у *алгебраического уравнения любой степени с произвольными комплексными коэффициентами*.
Это — *основная теорема алгебры комплексных чисел*, впервые доказанная «королем математиков» Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) в 1799 г.

Заключительные замечания

Вспомним, наши запросы к $\mathbb{C}$ были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел.
Внезапно обнаружилось, что в $\mathbb{C}$ можно извлекать корни *любой степени* из *любого комплексного числа*!
Но поле комплексных чисел обладает гораздо более сильным свойством: в $\mathbb{C}$ есть корни у *алгебраического уравнения любой степени с произвольными комплексными коэффициентами*.
Это — *основная теорема алгебры комплексных чисел*, впервые доказанная «королем математиков» Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) в 1799 г.