Тема II: Прямые и плоскости

§ 3. Прямая в пространстве

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Параметрические уравнения прямой

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке O. Пусть ℓ — прямая в пространстве, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит ℓ, а вектор $\vec{a} = (q, r, s)$ является направляющим вектором этой прямой. Дословно повторяя рассуждения, проведенные при выводе параметрических уравнений прямой на плоскости, можно показать, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \tag{1}$$

для некоторого t. Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Выражая параметр t из первого, второго и третьего уравнений системы (1) и приравнивая полученные выражения, мы получаем уравнения

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}, \tag{2}$$

которые называются *канонически уравнениями прямой в пространстве*.

Предположим теперь, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой. Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие уравнения, которые называются *уравнениями прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{3}$$

Общие уравнения прямой

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть ℓ — прямая, являющаяся пересечением плоскостей σ_1 и σ_2, а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.
Из того, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, вытекает, что либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (см. теорему о взаимном расположении плоскостей).

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Как найти ее каноническое уравнение? По условию либо $\frac{A_1}{A_2} \ne \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \ne \frac{C_1}{C_2}$. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \ne \frac{B_1}{B_2}$. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты некоторой точки, принадлежащей прямой ℓ. Тогда справедливы равенства $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$. Вычтем первое из этих равенств из первого уравнения системы $(*)$, а второе — из второго уравнения этой системы. Получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$. Поскольку $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, определитель этой системы отличен от 0. По теореме Крамера ее решение дается формулами:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Вынося общий множитель элементов столбца за знак определителя, получаем, что

$$\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix} = (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix} = -(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

(В первом случае мы переставили столбцы, что привело к смене знака.)

Следовательно, равенства (4) можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

или в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Мы получили каноническое уравнение прямой ℓ. Попутно получено

Замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

Вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

является направляющим вектором прямой, заданной уравнениями $(*)$.

Мы вывели замечание о направляющем векторе прямой в пространстве в произвольной системе координат. Формулы получились достаточно громоздкими и несколько загадочными. Однако в случае, когда система координат прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод).

Итак, предположим, что прямая ℓ задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым уравнением системы, через σ_1 и σ_2 соответственно. Вектора $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются теперь нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Положим $\vec{b} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n}_1$. Поскольку $\vec{n}_1 \perp \sigma_1$, получаем, что $\vec{b} \parallel \sigma_1$. Аналогично проверяется, что $\vec{b} \parallel \sigma_2$. Но тогда $\vec{b}$ коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2, т. е. прямой ℓ. Далее, из того, что $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, вытекает, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, откуда $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является направляющим вектором прямой ℓ.

Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности координаты

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Следствие

Если прямая задана как пересечение двух плоскостей и известны уравнения этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять векторное произведение главных векторов этих плоскостей.

Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности координаты

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Следствие

Если прямая задана как пересечение двух плоскостей и известны уравнения этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять векторное произведение главных векторов этих плоскостей.

Подводя итог, получаем такое *правило*: в качестве направляющего вектора прямой, заданной как пересечение двух плоскостей, можно взять вектор с координатами, вычисленными по формуле для координат векторного произведения главных векторов этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат.

Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности координаты

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Следствие

Если прямая задана как пересечение двух плоскостей и известны уравнения этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять векторное произведение главных векторов этих плоскостей.

Подводя итог, получаем такое *правило*: в качестве направляющего вектора прямой, заданной как пересечение двух плоскостей, можно взять вектор с координатами, вычисленными по формуле для координат векторного произведения главных векторов этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат.

Отметим, что это правило работает для *любой системы координат*, хотя когда система координат произвольна, нельзя утверждать, что векторное произведение главных векторов двух пересекающихся плоскостей параллельно прямой, по которой эти плоскости пересекаются.

Взаимное расположение прямой и плоскости (1)

Перейдем к вопросу о взаимном расположении прямой и плоскости.

Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости

Пусть плоскость σ *задана уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *а прямая* ℓ — *уравнениями* $\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st. \end{cases}$ *Тогда:*

1) ℓ *и* σ *пересекаются тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs \neq 0$;
2) ℓ *и* σ *параллельны тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
3) ℓ *лежит в* σ *тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Доказательство. Подставим $x_0 + qt$, $y_0 + rt$, $z_0 + st$ вместо x, y и z в уравнение плоскости. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0. \tag{5}$$

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит одновременно и ℓ, и σ, то значение параметра t, соответствующее точке M, является решением уравнения (5). Следовательно, ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда это уравнение имеет единственное решение; ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда оно не имеет решений; наконец, ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда это уравнение имеет бесконечно много решений. Уравнение (5) можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Ясно, что оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$, что доказывает утверждение 1); не имеет решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, что доказывает утверждение 2); имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, что доказывает утверждение 3). $\square$

Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}.$$

1) *ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$;*
2) *ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$ и либо $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$, либо $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$;*
3) *ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ и либо $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$, либо $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$;*
4) *ℓ_1 и ℓ_2 совпадают тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ и $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ — направляющий вектор прямой ℓ_1; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ — направляющий вектор прямой ℓ_2; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_1; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_2; $\vec{c} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда вектора $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из замечания о координатах компланарных векторов.

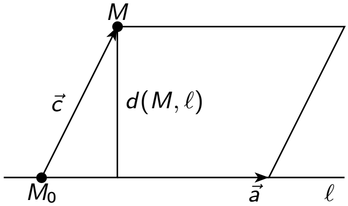
Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости или, что эквивалентно, выполнено равенство $\Delta = 0$. Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Учитывая критерий коллинеарности векторов, получаем утверждение 2).

Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1. Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае — параллельны. Учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{r_1} = \frac{z - z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3) и 4). □

Наша ближайшая цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0), принадлежащую прямой ℓ, обозначим через M_0, а вектор с координатами (q, r, s), являющийся направляющим вектором прямой ℓ, — через $\vec{a}$. Кроме того, положим $\vec{c} := \overrightarrow{M_0 M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок.



Расстояние от точки до прямой

Обозначим расстояние от точки M до прямой ℓ через $d(M,\ell)$. Ясно, что $d(M,\ell)$ — высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Обозначим его площадь через S. Тогда $d(M,\ell)=\frac{S}{|\vec{a}|}$. Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов, получаем, что

$$d(M,\ell)=\frac{|\vec{a}\times\vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве. Если система координат прямоугольная декартова, можно явно выразить $d(M,\ell)$ через координаты точек M_0 и M и вектора $\vec{a}$:

$$d(M,\ell)=\sqrt{\frac{\begin{array}{c}\big(r(z_1-z_0)-s(y_1-y_0)\big)^2+\big(q(z_1-z_0)-s(x_1-x_0)\big)^2+\\+\big(q(y_1-y_0)-r(x_1-x_0)\big)^2\end{array}}{q^2+r^2+s^2}}.$$

Наша следующая цель — научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Прежде, чем выводить соответствующую формулу, надо сказать, что понимается под таким расстоянием. Для этого нам понадобится одно новое понятие.

Определение

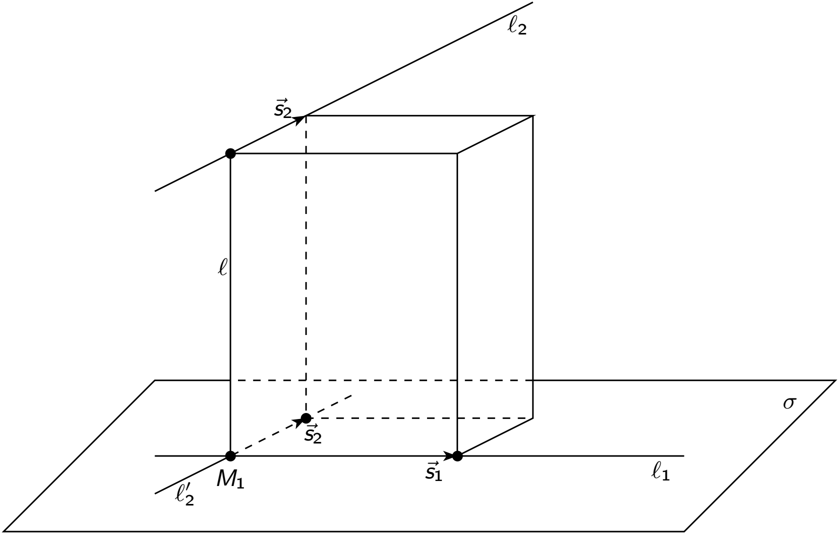
Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым ℓ_1 и ℓ_2 называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающая каждую из них.

То, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым всегда существует, не вполне очевидно. Докажем, что это так.

Теорема об общем перпендикуляре

Для произвольных скрещивающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 существует общий перпендикуляр к этим прямым.

Доказательство. Рассуждения иллюстрирует рисунок на следующем слайде.



Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (3)

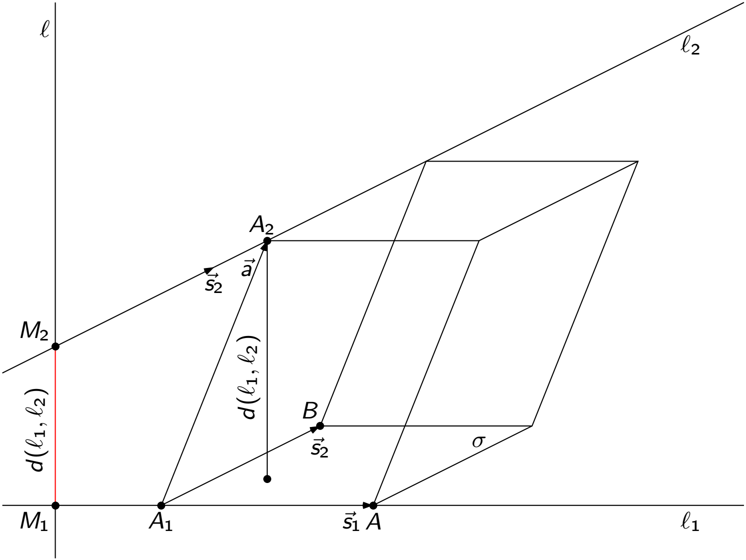
Обозначим через $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Ясно, что эти векторы не коллинеарны, так как в противном случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 были бы параллельными или совпадали бы. Обозначим через σ плоскость, проходящую через прямую ℓ_1 параллельно прямой ℓ_2, а через ℓ_2' — ортогональную проекцию прямой ℓ_2 на плоскость σ. Поскольку векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ не коллинеарны, прямые ℓ_1 и ℓ_2' пересекаются. Обозначим точку их пересечения через M_1. Далее, пусть ℓ — прямая, проходящая через точку M_1 перпендикулярно к плоскости σ. Из построения прямой ℓ_2' и того факта, что $M_1 \in \ell_2'$ вытекает, что прямые ℓ и ℓ_2 пересекаются и перпендикулярны. Следовательно, прямая ℓ является общим перпендикуляром к ℓ_1 и ℓ_2. $\square$

Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2.

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида A_1A_2, где $A_1 \in \ell_1$, а $A_2 \in \ell_2$.

Для того, чтобы вывести формулу расстояния между скрещивающимися прямыми, продолжим построения, начатые при доказательстве теоремы об общем перпендикуляре. Возьмем произвольные точки $A_1 \in \ell_1$ и $A_2 \in \ell_2$. Обозначим через M_2 точку пересечения прямых ℓ и ℓ_2, а через A и B — концы направленных отрезков, которые получатся, если отложить от точки A_1 векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ соответственно (см. рисунок на следующем слайде). Ясно, что расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, т. е. длина отрезка M_1M_2, равно длине высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B}$.



Расстояние между скрещивающимися прямыми

Длина высоты параллелепипеда равна частному от деления его объема на площадь основания. Таким образом, чтобы найти расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, надо объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} := \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{s_1} = \overrightarrow{A_1A}$ и $\vec{s_2} = \overrightarrow{A_1B}$, разделить на площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1A}$ и $\overrightarrow{M_1B}$. Обозначим расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 через $d(\ell_1, \ell_2)$. Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов, получаем, что

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\,\vec{a}\vec{s_1}\vec{s_2}\,|}{|\,\vec{s_1} \times \vec{s_2}\,|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

Расстояние между скрещивающимися прямыми (4)

Если система координат прямоугольная декартова, можно в явном виде выразить $d(\ell_1, \ell_2)$ через координаты точек A_1 и A_2 и векторов $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$. Обозначим координаты точек A_1 и A_2 через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, а координаты векторов $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$ — через (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) соответственно. Тогда:

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}}$$

(символом mod здесь обозначен модуль определителя).

Обсудим вычисление углов. Формулы для углов приведем для случая прямоугольной декартовой системы координат.

Обсудим вычисление углов. Формулы для углов приведем для случая прямоугольной декартовой системы координат.
Углом между прямыми (вне зависимости от их взаимного расположения) естественно считать угол между их направляющими векторами.

Обсудим вычисление углов. Формулы для углов приведем для случая прямоугольной декартовой системы координат.
Углом между прямыми (вне зависимости от их взаимного расположения) естественно считать угол между их направляющими векторами.
Так, если в пространстве заданы прямые с направляющими векторами (q_1, r_1, s_1) и (q_2, r_2, s_2), то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{q_1q_2 + r_1r_2 + s_1s_2}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2 + s_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2 + s_2^2}}.$$

.

Обсудим вычисление углов. Формулы для углов приведем для случая прямоугольной декартовой системы координат.
Углом между прямыми (вне зависимости от их взаимного расположения) естественно считать угол между их направляющими векторами.
Так, если в пространстве заданы прямые с направляющими векторами (q_1, r_1, s_1) и (q_2, r_2, s_2), то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{q_1 q_2 + r_1 r_2 + s_1 s_2}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2 + s_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2 + s_2^2}}.$$

.
Если прямые на плоскости заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

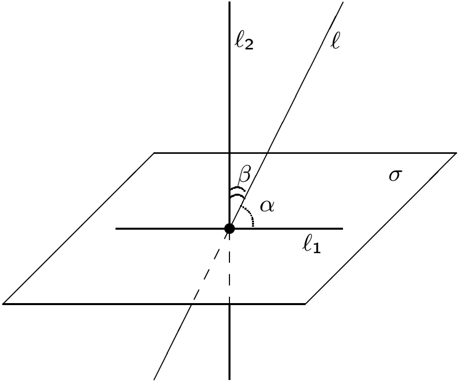
Угол между плоскостями

Величина угла между плоскостями определяется как величина линейного угла этого двугранного угла.

Величина угла между плоскостями определяется как величина линейного угла этого двугранного угла.
Если плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол между этими плоскостями можно найти, вычисляя угол α между их главными векторами по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Углом между прямой ℓ и плоскостью σ называется угол между прямой ℓ и ее проекцией на σ, см. рисунок.



Угол между прямой и плоскостью

Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 — прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ.

Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 — прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ. Если α — угол между ℓ и ℓ_1, а β — острый угол между ℓ и ℓ_2, то $\alpha + \beta = 90^o$.

Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 — прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ. Если α — угол между ℓ и ℓ_1, а β — острый угол между ℓ и ℓ_2, то $\alpha + \beta = 90^o$. Пусть (q, r, s) — направляющий вектор прямой ℓ, а $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости σ. Тогда прямая ℓ_2 коллинеарна главному вектору (A, B, C) плоскости σ.

Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 — прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ. Если α — угол между ℓ и ℓ_1, а β — острый угол между ℓ и ℓ_2, то $\alpha + \beta = 90^o$. Пусть (q, r, s) — направляющий вектор прямой ℓ, а $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости σ. Тогда прямая ℓ_2 коллинеарна главному вектору (A, B, C) плоскости σ. Отсюда

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{|qA + rB + sC|}{\sqrt{q^2 + r^2 + s^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью (2)

Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 — прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ. Если α — угол между ℓ и ℓ_1, а β — острый угол между ℓ и ℓ_2, то $\alpha + \beta = 90^o$. Пусть (q, r, s) — направляющий вектор прямой ℓ, а $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости σ. Тогда прямая ℓ_2 коллинеарна главному вектору (A, B, C) плоскости σ. Отсюда

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{|qA + rB + sC|}{\sqrt{q^2 + r^2 + s^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Модуль в числителе появился из-за того, что угол между прямой и плоскостью не больше 90^o, откуда $\sin\alpha = \cos\beta \geq 0$, а скалярное произведение векторов (q, r, s) и (A, B, C) может быть и отрицательным.