Тема II: Прямые и плоскости

§ 1. Прямая на плоскости

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет

Институт естественных наук и математики

кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Под *геометрическим объектом* на плоскости (в пространстве) будем понимать произвольное множество точек плоскости (пространства), возможно, пустое.

Под *геометрическим объектом* на плоскости (в пространстве) будем понимать произвольное множество точек плоскости (пространства), возможно, пустое.

Определение

Пусть π — плоскость, в которой зафиксирована система координат, а ℓ — некоторый геометрический объект в этой плоскости. Уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — функция двух переменных, называется *уравнением* ℓ, если точка плоскости π принадлежит ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению.

Под *геометрическим объектом* на плоскости (в пространстве) будем понимать произвольное множество точек плоскости (пространства), возможно, пустое.

Определение

Пусть π — плоскость, в которой зафиксирована система координат, а ℓ — некоторый геометрический объект в этой плоскости. Уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — функция двух переменных, называется *уравнением* ℓ, если точка плоскости π принадлежит ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению.

Говорят, что объект ℓ *задается* уравнением $F(x, y) = 0$ или что ℓ является *геометрическим образом* этого уравнения.

Под *геометрическим объектом* на плоскости (в пространстве) будем понимать произвольное множество точек плоскости (пространства), возможно, пустое.

Определение

Пусть π — плоскость, в которой зафиксирована система координат, а ℓ — некоторый геометрический объект в этой плоскости. Уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — функция двух переменных, называется *уравнением* ℓ, если точка плоскости π принадлежит ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению.

Говорят, что объект ℓ *задается* уравнением $F(x, y) = 0$ или что ℓ является *геометрическим образом* этого уравнения.

Пример

В прямоугольной декартовой системе координат окружность радиуса r с центром в точке (a, b) задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Идея — изучать геометрических объекты с помощью их уравнений.
Понятно, что для разных типов уравнений используются разные методы.

Идея — изучать геометрических объекты с помощью их уравнений. Понятно, что для разных типов уравнений используются разные методы.

Геометрические образы алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени

$$Ax + By + C = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

изучает *аналитическая геометрия* (часть нашего курса).

Уравнения геометрических объектов: грубая классификация

Идея — изучать геометрических объекты с помощью их уравнений. Понятно, что для разных типов уравнений используются разные методы.

Геометрические образы алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени

$$Ax + By + C = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

изучает *аналитическая геометрия* (часть нашего курса).

Геометрические образы алгебраических уравнений более высоких степеней изучает *алгебраическая геометрия*.

Уравнения геометрических объектов: грубая классификация

Идея — изучать геометрических объекты с помощью их уравнений. Понятно, что для разных типов уравнений используются разные методы.

Геометрические образы алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени

$$Ax + By + C = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

изучает *аналитическая геометрия* (часть нашего курса).

Геометрические образы алгебраических уравнений более высоких степеней изучает *алгебраическая геометрия*.

Геометрические образы уравнений $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — произвольная «достаточно хорошая» функция изучает *дифференциальная геометрия*.

Теорема об уравнении прямой на плоскости

Пусть на плоскости задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая на плоскости может быть задана некоторым уравнением вида

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A и B отличен от 0. Обратно, любое уравнение

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A и B отличен от 0, задает некоторую прямую.

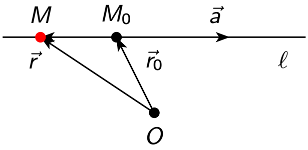
Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Предположим, что на плоскости задана система координат с началом в точке O. Пусть ℓ — прямая на плоскости, и мы знаем, что точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой ℓ, а вектор $\vec{a} = (r, s)$ является ее направляющим вектором. Ясно, что эти данные однозначно определяют прямую. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r_0}$, а радиус-вектор точки M — через $\vec{r}$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок.



К выводу уравнения прямой

Ясно, что точка M лежит на прямой ℓ тогда и только тогда, когда вектора $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны. Напомним, что $\vec{a} \neq \vec{0}$ по определению направляющего вектора прямой. Поэтому, в силу критерия коллинеарности векторов условие $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ равносильно тому, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого t. Поскольку $\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$ для некоторого t. По определению радиуса-вектора точки координаты векторов $\vec{r}$ и $\vec{r_0}$ совпадают с координатами точек M и M_0 соответственно. Расписав равенство $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$ в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + rt, \\ y = y_0 + st, \end{cases} \tag{1}$$

называемые *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*.

Выразив параметр t из первого и второго уравнений системы (1) и приравняв полученные выражения, мы получим равенство

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}, \qquad (2)$$

которое называется *канонческим уравнением прямой на плоскости*.

Доказательство прямого утверждения теоремы (3)

Выразив параметр t из первого и второго уравнений системы (1) и приравняв полученные выражения, мы получим равенство

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}, \qquad (2)$$

которое называется *канонические уравнением прямой на плоскости*.
Тут есть некоторая тонкость: одно из чисел r или s может оказаться равным 0, а ведь на 0 делить нельзя!

Выразив параметр t из первого и второго уравнений системы (1) и приравняв полученные выражения, мы получим равенство

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}, \qquad (2)$$

которое называется *канонически уравнением прямой на плоскости*.

Тут есть некоторая тонкость: одно из чисел r или s может оказаться равным 0, а ведь на 0 делить нельзя! Мы будем допускать записи вида $\frac{x-x_0}{0}$, подразумевая, что раз 0 стоит в знаменателе, числитель равен 0.

Выразив параметр t из первого и второго уравнений системы (1) и приравняв полученные выражения, мы получим равенство

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}, \tag{2}$$

которое называется *канонческим уравнением прямой на плоскости*.

Тут есть некоторая тонкость: одно из чисел r или s может оказаться равным 0, а ведь на 0 делить нельзя! Мы будем допускать записи вида $\frac{x-x_0}{0}$, подразумевая, что раз 0 стоит в знаменателе, числитель равен 0.

Отметим, что то же самое равенство можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ r & s \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

В самом деле, каждое из равенств (2) и (3) эквивалентно тому, что $s(x - x_0) - r(y - y_0) = 0$.

Выразив параметр t из первого и второго уравнений системы (1) и приравняв полученные выражения, мы получим равенство

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}, \qquad (2)$$

которое называется *канонический уравнением прямой на плоскости*.
Тут есть некоторая тонкость: одно из чисел r или s может оказаться равным 0, а ведь на 0 делить нельзя! Мы будем допускать записи вида $\frac{x-x_0}{0}$, подразумевая, что раз 0 стоит в знаменателе, числитель равен 0.

Отметим, что то же самое равенство можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ r & s \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

В самом деле, каждое из равенств (2) и (3) эквивалентно тому, что $s(x - x_0) - r(y - y_0) = 0$. Преобразуя последнее равенство, получаем $sx - ry - sx_0 + ry_0 = 0$. Положим $A := s$, $B := -r$ и $C := -sx_0 + ry_0$. Тогда уравнение примет вид

$$Ax + By + C = 0.$$

По крайней мере один из коэффициентов A и B отличен от 0, ибо r и s, будучи координатами ненулевого вектора, не равны 0 одновременно.

Рассмотрим уравнение $Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Пусть (x_0, y_0) — произвольное решение этого уравнения. (Заметим, что какое-то решение обязательно найдется. Например, если $A \neq 0$, то можно взять $x_0 = -\frac{C}{A}$, $y_0 = 0$, а если $B \neq 0$, годятся $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{C}{B}$.)

Рассмотрим уравнение $Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Пусть (x_0, y_0) — произвольное решение этого уравнения. (Заметим, что какое-то решение обязательно найдется. Например, если $A \neq 0$, то можно взять $x_0 = -\frac{C}{A}$, $y_0 = 0$, а если $B \neq 0$, годятся $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{C}{B}$.)
Обозначим через ℓ прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $(-B, A)$. Докажем, что эта прямая задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Напишем каноническое уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}. \qquad (4)$$

Преобразовав его, получим уравнение $A(x - x_0) = -B(y - y_0)$ или $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Поскольку (x_0, y_0) — решение уравнения $Ax + By + C = 0$, имеем $-Ax_0 - By_0 = C$. Следовательно, уравнение (4) равносильно уравнению $Ax + By + C = 0$. $\square$

Рассмотрим уравнение $Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Пусть (x_0, y_0) — произвольное решение этого уравнения. (Заметим, что какое-то решение обязательно найдется. Например, если $A \neq 0$, то можно взять $x_0 = -\frac{C}{A}$, $y_0 = 0$, а если $B \neq 0$, годятся $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{C}{B}$.) Обозначим через ℓ прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $(-B, A)$. Докажем, что эта прямая задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Напишем каноническое уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}. \tag{4}$$

Преобразовав его, получим уравнение $A(x - x_0) = -B(y - y_0)$ или $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Поскольку (x_0, y_0) — решение уравнения $Ax + By + C = 0$, имеем $-Ax_0 - By_0 = C$. Следовательно, уравнение (4) равносильно уравнению $Ax + By + C = 0$. □

По ходу доказательства установлен следующий полезный факт.

Замечание о направляющем векторе прямой на плоскости

Если прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор с координатами $(-B, A)$ является ее направляющим вектором. □

Определение

Пусть прямая ℓ задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *главным вектором* прямой ℓ.

Определение

Пусть прямая ℓ задана уравнением $Ax+By+C=0$. Тогда вектор $\vec{n}=(A,B)$ называется *главным вектором* прямой ℓ.

Замечание о главном векторе прямой

Главный вектор прямой не коллинеарен этой прямой.

Доказательство. Пусть прямая ℓ задана уравнением $Ax+By+C=0$, $\vec{n}=(A,B)$ и $M_0(x_0,y_0)\in\ell$, т. е. $Ax_0+By_0+C=0$. Отложим вектор $\vec{n}$ от точки M_0. Концом соответствующего направленного отрезка будет точка $M_1(x_0+A,y_0+B)$. Подставив координаты этой точки в левую часть уравнения прямой, получим

$$A(x_0+A)+B(y_0+B)+C=Ax_0+By_0+C+A^2+B^2=A^2+B^2\neq 0.$$

Таким образом, $M_1\notin\ell$. Поскольку $M_0\in\ell$, а $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{n}$, это означает, что вектор $\vec{n}$ и прямая ℓ не коллинеарны. $\square$

Еще одно замечание

В случае прямоугольной декартовой системы координат замечание о главном векторе прямой можно существенно усилить. В самом деле, в этом случае скалярное произведение векторов (A, B) и $(-B, A)$ равно $-AB + BA = 0$, т. е. эти вектора ортогональны (см. критерий ортогональности векторов в § I.2). Учитывая еще замечание о направляющем векторе прямой на плоскости, получаем, что справедливо

Замечание о нормальном векторе прямой

Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор прямой является ее нормальным вектором. Другими словами, если прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен этой прямой.

Предположим, что прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$. Тогда ее уравнение можно переписать в виде $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$. Положим $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Число k называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (5) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Это — «школьное» уравнение прямой. Из школьного курса известно, что если прямая ℓ задана (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением (5), то $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол между положительным направлением оси Ox и ℓ (именно этим объясняется термин «угловой коэффициент»).

Предположим, что прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$. Тогда ее уравнение можно переписать в виде $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$. Положим $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Число k называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (5) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Это — «школьное» уравнение прямой. Из школьного курса известно, что если прямая ℓ задана (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением (5), то $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол между положительным направлением оси Ox и ℓ (именно этим объясняется термин «угловой коэффициент»).

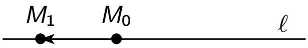
Уравнение (5) выведено в предположении, что в уравнении $Ax + By + C = 0$ коэффициент B отличен от нуля. Выясним, когда выполняется это условие. Предположим, напротив, что $B = 0$. Тогда прямая задается уравнением вида $Ax + C = 0$. При этом $A \neq 0$, поскольку коэффициенты A и B одновременно в 0 обращаться не могут. Следовательно, наша прямая задается уравнением $x = -\frac{C}{A}$. Ясно, что прямые с уравнением такого вида и только они параллельны оси ординат. Таким образом,

- *прямая имеет уравнение с угловым коэффициентом тогда и только тогда, когда она не параллельна оси ординат.*

Уравнение прямой по двум точкам

Предположим, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой, см. рисунок. Подставляя координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ в каноническое уравнение прямой, получаем *уравнение прямой на плоскости по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$



К выводу уравнения по двум точкам

Следующий вопрос, который мы рассмотрим, звучит так: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т. е. выяснить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Ответ на него дает

Теорема о взаимном расположении прямых на плоскости

Пусть прямая ℓ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая ℓ_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Прямые ℓ_1 и ℓ_2:

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;
2) *параллельны тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
3) *совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Следующий вопрос, который мы рассмотрим, звучит так: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т. е. выяснить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Ответ на него дает

Теорема о взаимном расположении прямых на плоскости

Пусть прямая ℓ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая ℓ_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Прямые ℓ_1 и ℓ_2:

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;*
2) *параллельны тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;*
3) *совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.*

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \tag{6}$$

Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет единственное решение; параллельны тогда и только тогда, когда она не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда она имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Это неравенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Известно, что в этом случае система (6) имеет единственное решение (теорема Крамера), т. е. прямые пересекаются.

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Это неравенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Известно, что в этом случае система (6) имеет единственное решение (теорема Крамера), т. е. прямые пересекаются. Правило Крамера

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Это неравенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Известно, что в этом случае система (6) имеет единственное решение (теорема Крамера), т. е. прямые пересекаются.

Случай 2: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Убедимся, что в этом случае прямые параллельны. Положим $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = t$. Тогда $A_1 = tA_2$ и $B_1 = tB_2$. Предположим, что система (6) имеет решение (x_0, y_0), т. е.

$$\begin{cases} tA_2x_0 + tB_2y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

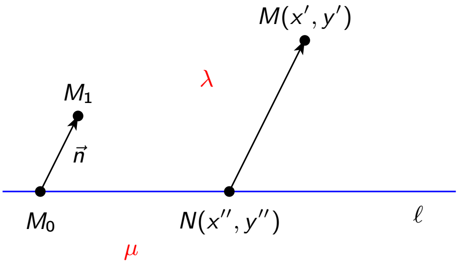
Умножим второе равенство на $-t$ и сложим его с первым. Получим $C_1 - C_2t = 0$, т. е. $\frac{C_1}{C_2} = t$, что противоречит неравенству $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Мы доказали, что прямые параллельны.

Случай 3: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Положим $\frac{A_1}{A_2} = t$. Тогда $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$, $C_1 = tC_2$, и первое уравнение системы (6) можно записать в виде $t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, причем $t \neq 0$ (так как в противном случае $A_1 = B_1 = 0$). Таким образом, первое уравнение системы (6) равносильно второму. Следовательно, они определяют одну и ту же прямую.

Случай 3: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Положим $\frac{A_1}{A_2} = t$. Тогда $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$, $C_1 = tC_2$, и первое уравнение системы (6) можно записать в виде $t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, причем $t \neq 0$ (так как в противном случае $A_1 = B_1 = 0$). Таким образом, первое уравнение системы (6) равносильно второму. Следовательно, они определяют одну и ту же прямую.

Таким образом, для каждого из трех случаев взаимного расположения прямых мы получили достаточное условие. Убедимся на примере случая пересечения прямых, что эти же условия являются и необходимыми. Пусть прямые пересекаются. Тогда условия случаев 2) и 3) из формулировки теоремы не выполняются, поскольку в противном случае прямые были бы либо параллельными, либо совпадающими. Следовательно, выполнено условие случая 1), т. е. $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$. Аналогично проверяется необходимость в случаях параллельности и совпадения прямых. Теорема доказана. □

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выяснить, как по уравнению прямой и координатам двух точек, не лежащих на этой прямой, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от прямой. Пусть ℓ — прямая, заданная уравнением $Ax + By + C = 0$. Вся плоскость делится этой прямой на три непересекающиеся части: саму прямую ℓ и две *полуплоскости* (в каждую из этих полуплоскостей входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от ℓ). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок.



Полуплоскости

Обозначим главный вектор прямой ℓ через $\vec{n}$. Возьмем на ℓ произвольную точку M_0 и отложим от нее вектор $\vec{n}$. Конец получившегося направленного отрезка обозначим через M_1. Из замечания о главном векторе прямой вытекает, что точка M_1 не принадлежит прямой ℓ. Обозначим ту полуплоскость, в которой лежит точка M_1, через λ, а другую — через μ.

Теорема о полуплоскостях

Пусть $M(x',y')$ — точка плоскости. Если $M \in \lambda$, то $Ax'+By'+C>0$, а если $M \in \mu$, то $Ax'+By'+C<0$.

Доказательство. Пусть $M \in \lambda$. Через точку M проведем прямую, коллинеарную вектору $\vec{n}$. Поскольку, в силу замечания о главном векторе прямой, $\vec{n} \nparallel \ell$, проведенная нами прямая пересечет прямую ℓ. Обозначим точку пересечения через N, а ее координаты — через (x'',y''). Ясно, что $Ax''+By''+C=0$. Векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ сонаправленны, т. е. $\overrightarrow{NM}=t\vec{n}$ для некоторого $t>0$. Записав это векторное равенство в координатах, получим, что $x'-x''=tA$ и $y'-y''=tB$, откуда $x'=x''+tA$ и $y'=y''+tB$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Ax'+By'+C &= A(x''+tA)+B(y''+tB)+C= \\ &= Ax''+By''+C+t(A^2+B^2)=t(A^2+B^2)>0. \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы доказывается вполне аналогично. Надо только учесть, что если $M \in \mu$, то вектора $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ противонаправленны и потому $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}$ для некоторого $t < 0$. $\square$

Из теоремы о полуплоскостях вытекает следующий ответ на поставленный выше вопрос.

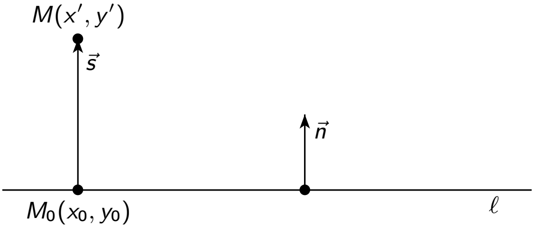
Следствие о расположении двух точек относительно прямой

Точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ расположены по одну сторону от прямой $Ax + By + C = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой прямой тогда и только тогда, когда эти числа имеют разные знаки.

Важно также запомнить, что *главный вектор прямой, если его отложить от точки этой прямой, направлен в положительную полуплоскость.*

В заключение параграфа выведем формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости. *Будем предполагать, что система координат — прямоугольная декартова.*

Пусть прямая ℓ задана уравнением $Ax + By + C = 0$, а $M(x', y')$ — некоторая точка плоскости. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок:



К выводу формулы расстояния от точки до прямой

Обозначим через $M_0(x_0, y_0)$ ортогональную проекцию точки M на ℓ. Поскольку система координат — прямоугольная декартова, то в силу замечания о нормальном векторе прямой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к ℓ. Положим $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M}$. Поскольку вектор $\vec{s}$ также перпендикулярен к ℓ, получаем, что $\vec{s} \parallel \vec{n}$. Следовательно, угол между векторами $\vec{s}$ и $\vec{n}$ равен либо 0, либо π, и потому $\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \pm 1$. Отсюда вытекает, что $\vec{s}\vec{n} = \pm|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|$. Обозначим расстояние от M до ℓ через $d(M, \ell)$. В силу сказанного,

$$d(M, \ell) = |\vec{s}| = \frac{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{s}\vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Учитывая, что $M_0 \in \ell$, получаем, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Следовательно,

$$\vec{s}\vec{n} = A(x' - x_0) + B(y' - y_0) = Ax' + By' - (Ax_0 + By_0) = Ax' + By' + C.$$

Таким образом, формула для вычисления расстояния от точки $M(x', y')$ до прямой ℓ, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $Ax + By + C = 0$, имеет следующий вид:

$$d(M, \ell) = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла.

Пример: задача о биссектрисе

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла. Условие равноудаленности точки от прямые ℓ_1 и ℓ_2 записывается равенством

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (*)$$

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла. Условие равноудаленности точки от прямые ℓ_1 и ℓ_2 записывается равенством

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (*)$$

Но этому условию удовлетворяют в точности точки биссектрис *обеих* пар вертикальных углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2.

Пример: задача о биссектрисе

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла. Условие равноудаленности точки от прямые ℓ_1 и ℓ_2 записывается равенством

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (*)$$

Но этому условию удовлетворяют в точности точки биссектрис *обеих* пар вертикальных углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2. Как выбрать из них нужную? Точки нужной биссектрисы лежат по одну сторону от каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 с данной точкой $M_0(x_0, y_0)$.

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла. Условие равноудаленности точки от прямые ℓ_1 и ℓ_2 записывается равенством

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (*)$$

Но этому условию удовлетворяют в точности точки биссектрис *обеих* пар вертикальных углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2. Как выбрать из них нужную? Точки нужной биссектрисы лежат по одну сторону от каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 с данной точкой $M_0(x_0, y_0)$. Поэтому модули в $(*)$ нужно раскрыть в зависимости от знаков чисел $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$.

Пример: задача о биссектрисе

Как пример применения результатов параграфа, разберем такую задачу.

Задача о биссектрисе (система координат прямоугольная декартова)

Пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Написать уравнение биссектрисы того угла между ℓ_1 и ℓ_2, в котором лежит данная точка $M_0(x_0, y_0)$.

Точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла. Условие равноудаленности точки от прямые ℓ_1 и ℓ_2 записывается равенством

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (*)$$

Но этому условию удовлетворяют в точности точки биссектрис *обеих* пар вертикальных углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2. Как выбрать из них нужную? Точки нужной биссектрисы лежат по одну сторону от каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 с данной точкой $M_0(x_0, y_0)$. Поэтому модули в $(*)$ нужно раскрыть в зависимости от знаков чисел $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$. Например, если эти знаки разные, уравнение нужной биссектрисы есть

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.
Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.
Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Видно, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то решениями системы могут быть лишь

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \text{ и } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.
Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Видно, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то решениями системы могут быть лишь $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. С другой стороны, прямой подстановкой можно проверить, что эти выражения являются решениями.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Видно, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то решениями системы могут быть лишь $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. С другой стороны, прямой подстановкой можно проверить, что эти выражения являются решениями. Итак, *если* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, *система* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$ *имеет единственное решение.*

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Видно, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то решениями системы могут быть лишь $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. С другой стороны, прямой подстановкой можно проверить, что эти выражения являются решениями. Итак, *если* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, *система* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$ *имеет единственное решение.*

Вернуться обратно