

Тема I: Векторная алгебра

§ 5. Система координат. Координаты точки

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

В школьном курсе математики сначала вводятся координаты точки, а затем с их помощью определяются координаты вектора. В нашем курсе порядок появления этих понятий обратный — координаты вектора у нас уже появились в § 1, а теперь на их основе будут определены координаты точки. Но сначала надо сказать, что мы будем понимать под словами «система координат».

Определения

Системой координат в пространстве [на плоскости] называется совокупность базиса пространства [соответственно базиса плоскости] и точки [принадлежащей этой плоскости]. Точка, входящая в систему координат, называется *началом системы координат*. Систему координат, состоящую из базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и начала координат O , будем обозначать через $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$; в случае плоскости используется обозначение $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Прямые, проходящие через точку O параллельно одному из базисных векторов, называются *осями координат*. Прямую, проходящую через точку O параллельно вектору \vec{b}_1 , будем называть *осью абсцисс*, прямую, проходящую через точку O параллельно вектору \vec{b}_2 , — *осью ординат*, а прямую, проходящую через точку O параллельно вектору \vec{b}_3 , — *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через точку O и две из трех осей координат, называются *координатными плоскостями*.

Определение

Зафиксируем в пространстве некоторую систему координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Вектор \vec{OM} называется *радиусом-вектором* точки M . *Координатами точки M* в системе координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называются координаты ее радиуса-вектора в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тот факт, что точка M в некоторой системе координат имеет координаты (a_1, a_2, a_3) , будем обозначать так: $M(a_1, a_2, a_3)$. Координаты точки на плоскости определяются аналогично координатам точки в пространстве.

Пусть точки A и B имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая, что $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, а координаты точек A и B совпадают с координатами векторов \vec{OA} и \vec{OB} соответственно, получаем, что

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3). \quad (1)$$

Иными словами,

- чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала.

Определение

Система координат в пространстве $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правый ортонормированный. Система координат на плоскости $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) — ортонормированный.

- В дальнейшем прямоугольная декартова система координат будет играть ту же роль, которую выше играл ортонормированный базис, — именно в прямоугольной декартовой системе координат многие формулы и уравнения будут принимать наиболее простой и удобный для применения вид.

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox , Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy , Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая формулу (1) из данного параграфа и формулу из § 2, получаем, что расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \quad (2)$$

Определение

Предположим, что даны различные точки A и B и число t . Будем говорить, что *точка C делит отрезок AB в отношении t* , если

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}. \quad (3)$$

Например, если C — середина отрезка AB , то она делит его в отношении 1 (так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$), точка A делит его в отношении 0 (так как $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$), а точка B не делит его ни в каком отношении (так как $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ и не существует такого числа t , что $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{BB}$). На рисунке точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\frac{1}{2}$, а точка C_2 — в отношении -4 .



Деление отрезка в данном отношении

- Как видно из последнего примера, точка, делящая отрезок в некотором отношении, не обязана принадлежать этому отрезку.

Пусть $t = -1$ и выполнено равенство (3). Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, что невозможно, так как точки A и B различны. Пусть теперь $t \neq -1$.

Предположим, что точка C , делящая отрезок AB в отношении t , существует. Выведем формулы для нахождения координат точки C , если известны координаты точек $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ и число t .

Обозначим координаты точки C через (c_1, c_2, c_3) . Расписывая равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ в координатах, имеем

$$\begin{cases} c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1), \\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2), \\ c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3). \end{cases} \quad (4)$$

Из этих равенств получаем, что

$$\begin{cases} c_1 = \frac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \frac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \frac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases} \quad (5)$$

Формулы (5) называются *формулами деления отрезка в отношении t* .

Равенства (5) означают, в частности, что если точка C существует, то она единственна. Существование точки C также устанавливается легко. В самом деле, рассмотрим точку C , координаты которой задаются равенствами (5). Тогда будут выполняться равенства (4). Но последние есть не что иное, как равенство (3), расписанное в координатах. Итак, точка C , делящая отрезок AB в отношении t , существует тогда и только тогда, когда $t \neq -1$, причем при выполнении этого условия она единственна. Посмотрим, где эта точка может располагаться. Из равенства (3) вытекает, что направленные отрезки \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CB} коллинеарны. Это означает, что точка C должна лежать на прямой AB . Как отмечалось выше, она не может совпадать с точкой B . Пусть теперь C — произвольная точка прямой AB , отличная от B . Тогда векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CB} коллинеарны и $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$. В силу критерия коллинеарности векторов существует такое число t , что выполнено равенство (3). Итак,

- *точка C делит отрезок AB в некотором отношении тогда и только тогда, когда она принадлежит прямой AB и отлична от точки B . При этом, если C принадлежит отрезку AB , то $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, и потому $t \geq 0$, а в противном случае $\overrightarrow{AC} \updownarrow \overrightarrow{CB}$, и потому $t < 0$.*

Отметим один важный частный случай. Пусть C — середина отрезка AB . Как уже отмечалось, середина отрезка делит его в отношении 1. Подставляя $t = 1$ в формулы (5), получаем координаты точки C :

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right).$$

Иными словами,

- *координаты середины отрезка суть полусуммы соответствующих координат его начала и конца.*