Тема I: Векторная алгебра

§ 4. Смешанное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное. Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!

Всё смешалось в доме Облонских

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!
Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!
Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!
Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

- Как и в случае скалярного произведения, результатом смешанного произведения является число.

Первым утверждением, показывающим полезность понятия смешанного произведения, является следующий факт.

Критерий компланарности векторов

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$. Но вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости σ, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку $\vec{c}$ ортогонален этому вектору, то он лежит в σ. А это означает, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. $\square$

Геометрический смысл смешанного произведения (1)

Следующее утверждение указывает еще одно важное и для теории, и для приложений свойство смешанного произведения.

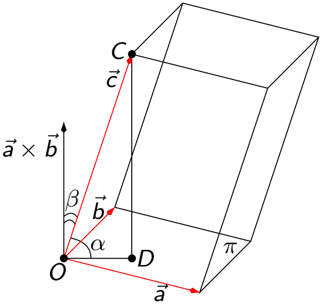
Теорема: геометрический смысл смешанного произведения

Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — три некомпланарных вектора. Предположим сначала, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок на следующем слайде.

Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O. Пусть точка C такова, что $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, а D — проекция точки C на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которую мы обозначим через π. Угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью π обозначим через α, а угол между векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ — через β. Учитывая, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, и потому $\sin\alpha = \cos\beta$, и используя геометрический смысл векторного произведения, имеем

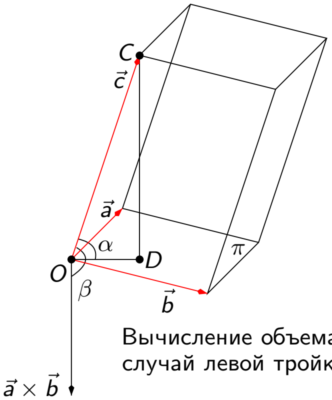
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |CD| = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |\,\vec{c}\,| \cdot \sin\alpha =$$
$$= |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot |\,\vec{c}\,| \cdot \cos\beta = (\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$



Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Пусть теперь тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. Тогда $\alpha = \beta - 90^\circ$ (см. рисунок), откуда $\sin\alpha = -\cos\beta$. Имеем

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\alpha =$$
$$= -|\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\beta = -(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$



Вычисление объема параллелепипеда, случай левой тройки

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. $\square$

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ левая. В любом случае $V = |\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|$. $\square$

Из доказательства теоремы вытекает важное следствие:

Замечание об ориентации тройки векторов

Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.

Геометрический смысл смешанного произведения (4)

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. □

Из доказательства теоремы вытекает важное следствие:

Замечание об ориентации тройки векторов

Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.

Этот факт объясняет, почему правая тройка векторов называется положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной.

Перечислим теперь алгебраические свойства смешанного произведения.

Свойства смешанного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
3) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (*смешанное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (*смешанное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*);
5) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (*смешанное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. $\square$

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. □

Заметим, что из равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ вытекает своего рода «ассоциативность»:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Действительно, левая часть по определению равна $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а так как скалярное произведение коммутативно, правая часть есть $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. $\square$

Заметим, что из равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ вытекает своего рода «ассоциативность»:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Действительно, левая часть по определению равна $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а так как скалярное произведение коммутативно, правая часть есть $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
Итак, в выражении $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ на самом деле не важно, какие из векторов перемножаются векторно, а какие скалярно. Это оправдывает симметрию в обозначении для смешанного произведения.

Доказательство свойства 2). Используя свойства скалярного произведения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})(t\vec{c}) = t((\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}) = t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Используя это равенство и свойство 1) смешанного произведения, имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t\cdot\vec{b}\vec{c}\vec{a} = t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Равенство $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ проверяется аналогично предыдущему. $\square$

Используя свойства скалярного произведения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\,\vec{c}+\vec{d}\,) = (\,\vec{a}\times\vec{b}\,)(\,\vec{c}+\vec{d}\,) = (\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\vec{c} + (\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано. $\square$

Используя свойства 1) и 5) смешанного произведения, имеем

$$(\,\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\,\vec{a}+\vec{b}\,) = \vec{c}\vec{d}\vec{a} + \vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Свойство 3) доказано. Свойство 4) доказывается аналогично. $\square$

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения — доказательство

Свойство, указанное в заголовке слайда, было сформулировано в § 3, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного произведения и свойства скалярного произведения, имеем

$$((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t\vec{a})\vec{b}\vec{x} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{x} = t \cdot ((\vec{a} \times \vec{b})\vec{x}) = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}.$$

Таким образом, $((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. В силу ослабленного закона сокращения для скалярного произведения имеем $(t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$. Аналогично проверяется, что $\vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$. Итак, то, что скаляры можно выносить за знак векторного произведения, доказано. $\square$

Как и в предыдущем случае, свойство, указанное в заголовке слайда, было сформулировано в § 3, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного произведения и свойства скалярного произведения, имеем

$$((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Итак, $((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного произведения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Мы доказали, что векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. $\square$

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения — доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство, указанное в заголовке слайда, было сформулировано в § 3, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного произведения и свойства скалярного произведения, имеем

$$((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Итак, $((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного произведения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Мы доказали, что векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. $\square$

Здесь проверена дистрибутивность по первому аргументу. В прошлой лекции мы отмечали, что дистрибутивность по второму аргументу следует из дистрибутивности по первому аргументу и антикоммутативности. Легко понять, что можно и дистрибутивность по второму аргументу доказывать с помощью того же приема, не задействуя антикоммутативность.

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора. По определению векторного произведения векторный квадрат любого вектора равен $\vec{0}$, откуда

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}.$$

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора. По определению векторного произведения векторный квадрат любого вектора равен $\vec{0}$, откуда

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

Но первое и последнее слагаемое равны $\vec{0}$, откуда $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}=\vec{0}$, т.е. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

Пусть вектора $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ образуют базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что если два из трех векторов равны, то смешанное произведение этих трех векторов равно нулю. Используя этот факт, получаем равенства

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + \\ &+ (x_2y_3z_1)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1.\end{aligned}$$

Используя свойство 1) смешанного произведения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как определитель 3-го порядка, в котором по строкам записаны координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Следовательно,

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3. \qquad (1)$$

В отличие от ситуации со скалярным и векторным произведением, равенство (1) дает достаточно простую и легко запоминаемую формулу, связывающую смешанное произведение векторов с их координатами в произвольном базисе. Но и в этом случае мы не можем вычислить смешанное произведение, не зная смешанного произведения базисных векторов. Справедливо, однако, следующее полезное утверждение.

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) *и* (z_1, z_2, z_3) — *координаты векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *соответственно в некотором (произвольном) базисе. Векторы* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — базис, о котором идет речь в формулировке замечания. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Учитывая формулу (1), получаем, что $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2). Остается снова сослаться на критерий компланарности. □

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ является правым ортонормированным, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$, и потому

$$\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\vec{b}_3 = \vec{b}_3\vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула (1) принимает совсем простой вид:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.
Используя смешанное произведение, можно

1) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$: в силу (3) и геометрического смысла смешанного произведения верно равенство
$$V = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$
(в этой формуле символ mod обозначает модуль);

2) определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: из (3) и замечания об ориентации тройки векторов вытекает, что тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
   - положительно ориентирована тогда и только тогда, когда
   $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0,$$
   - отрицательно ориентирована тогда и только тогда, когда
   $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0.$$