Тема I: Векторная алгебра

§ I.3. Векторное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Для того, чтобы дать определение векторного произведения векторов, необходимо ввести понятие ориентации тройки векторов. Это понятие пригодится нам и в дальнейшем.

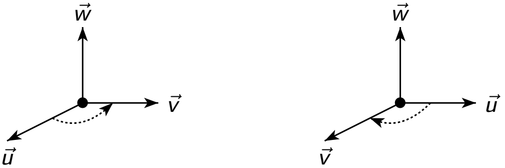
Определение

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ называется *правой*, если из конца вектора $\vec{w}$ поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и *левой* — в противном случае. Правую тройку векторов называют также *положительно ориентированной*, а левую — *отрицательно ориентированной*.

- Термины «правая» и «левая» тройки векторов имеют «антропогенное» происхождение: если смотреть с конца большого пальца на поворот от указательного пальца к среднему, то на правой руке он будет происходить против часовой стрелки, а на левой — по ней.

Причина, по которой правая тройка называется также положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной, станет ясной в следующем параграфе.

На рисунке тройка векторов ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) слева является правой, а справа — левой (имеется в виду, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ расположены в горизонтальной плоскости, а вектор $\vec{w}$ направлен вверх).



Правая (слева) и левая (справа) тройки векторов

Несложно убедиться в том, что

- *перестановка двух соседних векторов в тройке меняет ее ориентацию на противоположную, а циклическая перестановка не меняет.* (*Циклическая перестановка* — это переход от тройки ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) к тройке ($\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$) или к тройке ($\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$).)

Определение

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

1) $|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$,
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3) тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулевому вектору. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Заметим, что п. 2) из определения векторного произведения определяет прямую, вдоль которой направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (это прямая, перпендикулярная к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), но не указывает, в какую сторону вдоль этой прямой направлен этот вектор. Для того, чтобы однозначно указать направление вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, и нужен п. 3) определения.

Пример: векторные произведения векторов правого ортонормированного базиса

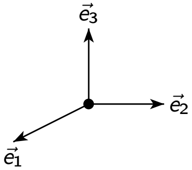
Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — *правый ортонормированный базис пространства*, т. е. ортонормированный базис, являющийся правой тройкой векторов (см. рисунок). Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1. \tag{1}$$

Первое равенство вытекает из того, что

$$|\vec{e}_3| = 1 = 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}),$$

$\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$ и тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правая. Два других равенства проверяются аналогично.



Правый ортонормированный базис

В § 1 был приведен критерий коллинеарности векторов. С помощью векторного произведения можно указать еще одно утверждение такого рода.

2-й критерий коллинеарности векторов

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

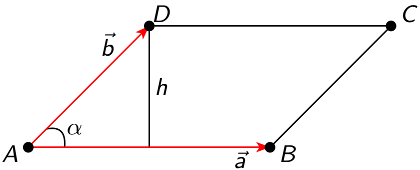
Доказательство. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ по определению векторного произведения. Обратно, если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, т. е. либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$, либо $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Ясно, что в каждом из этих трех случаев $\vec{a} \parallel \vec{b}$. $\square$

Следующее утверждение указывает свойство векторного произведения, важное в различных приложениях (как в математике, так и за ее пределами, например, в физике).

Геометрический смысл векторного произведения

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то длина векторного произведения этих векторов равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, построенный на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (при этом $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$), S — площадь этого параллелограмма, h — длина его высоты, опущенной из точки D, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рисунок). Тогда $S = |\,\vec{a}\,| \cdot h = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin\alpha = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,|$. $\square$



Вычисление площади параллелограмма

Укажем теперь алгебраические свойства векторного произведения.

Свойства векторного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (*векторное произведение антикоммутативно*);
2) $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (*векторное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (*векторное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*).

- Из свойств сложения и векторного произведения векторов видно, что множество всех векторов с этими двумя операциями является кольцом. Это кольцо некоммутативно и неассоциативно. Это единственный пример неассоциативного кольца, возникающий в нашем курсе.

Свойства 1) и 4) будут доказаны на следующем слайде, а свойства 2) и 3) — в следующем параграфе.

Доказательство свойства 1). Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то, в силу 2-го критерия коллинеарности, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$. Из последнего равенства вытекает, что $-(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Предположим теперь, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Убедимся сначала, что модули векторов, указанных в левой и правой частях доказываемого равенства, равны между собой. В самом деле, $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, и потому

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = |\vec{b} \times \vec{a}| = \left|-(\vec{b} \times \vec{a})\right|.$$

Как левая, так и правая части доказываемого равенства ортогональны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ является правой (по определению векторного произведения), для завершения доказательства равенства осталось убедиться в том, что тройка $\left(\vec{a}, \vec{b}, -(\vec{b} \times \vec{a})\right)$ также является правой. Заметим, что по определению векторного произведения тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$ — правая. Если у последнего вектора сменить знак, мы получим левую тройку $\left(\vec{b}, \vec{a}, -(\vec{b} \times \vec{a})\right)$. Поскольку перестановка соседних векторов меняет ориентацию тройки, мы получаем, что тройка $\left(\vec{a}, \vec{b}, -(\vec{b} \times \vec{a})\right)$ — правая. $\square$

Свойство 4) следует из свойств 1) и 3). В самом деле,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = -(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}) = -(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Свойство 4) доказано.

Вычисление векторного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — некоторый базис пространства, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Применяя свойства 2)–4) векторного произведения, имеем

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) &= \\ = (x_1y_1)\cdot\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + (x_1y_2)\cdot\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3)\cdot\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &+ \\ + (x_2y_1)\cdot\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + (x_2y_2)\cdot\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + (x_2y_3)\cdot\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &+ \\ + (x_3y_1)\cdot\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + (x_3y_2)\cdot\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + (x_3y_3)\cdot\vec{e}_3 \times \vec{e}_3&.\end{aligned}$$

Используя 2-й критерий коллинеарности векторов и антикоммутативность векторного произведения, можно переписать это равенство в виде

$$\vec{x}\times\vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1)\cdot\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3 - x_3y_1)\cdot\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + (x_2y_3 - x_3y_2)\cdot\vec{e}_2 \times \vec{e}_3. \quad (2)$$

Как и в случае со скалярным произведением векторов, эта формула не позволяет вычислить векторное произведение без дополнительной информации о векторных произведениях базисных векторов.

Предположим теперь, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правый ортонормированный базис. Используя равенства (1), получаем, что формула (2) приобретает вид

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3. \tag{3}$$

Правую часть этого равенства удобно представлять как результат разложения по первой строке символического определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

С учетом этой договоренности, окончательно имеем

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правый ортонормированный базис, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Используя векторное произведение, можно

1) вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$: из геометрического смысла векторного произведения и формулы (3) вытекает, что
$$S = \sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}; \qquad (5)$$
2) вычислить синус угла между ненулевыми векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$: из определения векторного произведения и формулы (3) вытекает, что
$$\sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Наряду с формулой (5), можно указать еще одну формулу для вычисления площади параллелограмма. Предположим, что мы знаем только координаты векторов, на которых построен параллелограмм, в базисе той плоскости, в которой эти векторы лежат. А именно, пусть параллелограмм построен на неколлинеарных векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ — ортонормированный базис плоскости π, в которой лежат $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Обозначим координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ через (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно.

Пусть $\vec{e}_3$ — вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости π и направленный так, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правая тройка векторов. Ясно, что эта тройка образует правый ортонормированный базис пространства, в котором векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют координаты $(x_1, x_2, 0)$ и $(y_1, y_2, 0)$ соответственно. В силу (4) имеем

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Учитывая геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$S = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

(символом mod мы обозначили модуль определителя, поскольку стандартное обозначение модуля числа было бы здесь неудобочитаемым). Отметим, что формулу (6) можно переписать в виде $S = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$. Легко видет, что правая часть последнего равенства совпадает с правой частью равенства (5) при $x_3 = y_3 = 0$.