# Тема I: Векторная алгебра

# §I.1. Линейные операции над векторами

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

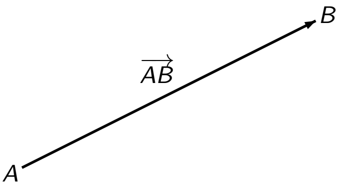
2020/2021 учебный год

Материал этого параграфа в основном известен из школьного курса математики. Тем не менее, он необходим для систематического изложения нашего курса. К тому же, есть и существенные отличия от изложения этого материала в школе. Основное из них состоит в определении понятия вектора.

### Определение

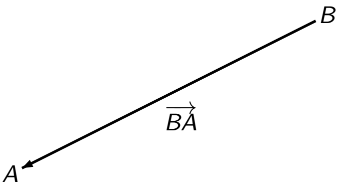
Отрезок $AB$ называется *направленным*, если указано, какая из точек $A$ или $B$ является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Если $A = B$, то отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* к $\overrightarrow{AB}$.

- В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позднее.




Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$

# Направленные отрезки — иллюстрация

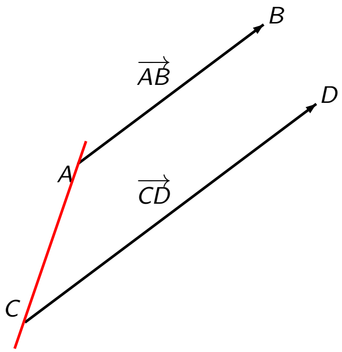



Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$

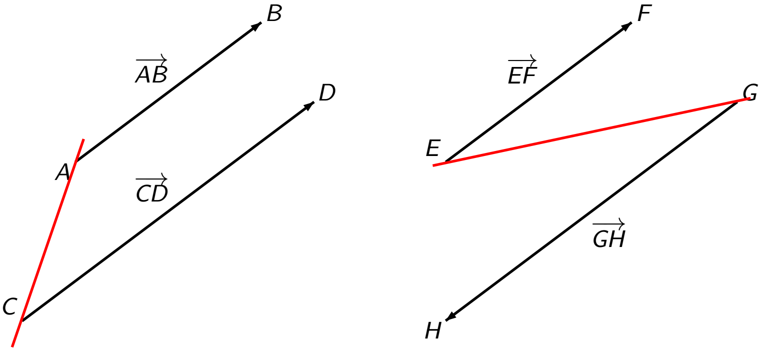
**Определения**

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Коллинеарные направленные отрезки называются *сонаправленными* или *прямо коллинеарными*, если они направлены в одну и ту же сторону, и *противонаправленными* или *обратно коллинеарными* в противоположном случае. Нулевой направленный отрезок по определению считается коллинеарным, сонаправленным и противонаправленным любому направленному отрезку. Коллинеарность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ обозначается через $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, их сонаправленность — через $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, а противонаправленность — через $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

- Термин «коллинеарность» происходит от латинских корней «col» (придает значение совместности) и «linearis» (линейный).




Прямо коллинеарные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — концы отрезков лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.




Прямо коллинеарные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — концы отрезков лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.

Обратно коллинеарные отрезки $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ — концы отрезков лежат по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.

Введем на множестве всех направленных отрезков бинарное отношение $\alpha$ следующим образом: $\overrightarrow{AB}\,\alpha\,\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$. Очевидно, что отношение $\alpha$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

**Определение**

*Вектором* называется класс отношения эквивалентности $\alpha$.

- Иными словами вектор — это множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление.

**Определение**

Направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется *изображением вектора*.

Все изображения данного вектора имеют одну и ту же длину. Это делает корректным следующее

**Определение**

*Длиной* (или *модулем*) *вектора* называется длина любого его изображения.

# Понятие вектора (2)

**Определение**

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т. е. состоят из одних и тех же направленных отрезков.

Допуская вольность речи, говорят, что

- *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.*

Очевидно, что для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки $A$ пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке $A$. Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора* $\vec{a}$ *от точки* $A$.

**Определение**

Два вектора называются *коллинеарными* [*сонаправленными*, *противонаправленными*], если их изображения коллинеарны [сонаправленны, противонаправленны].

Для обозначения понятий, сформулированных в определении, применяются те же символы, что и для обозначения соответствующих понятий в случае направленных отрезков: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

**Определения**

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является изображением вектора $\vec{a}$, то вектор, изображением которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Из данных выше определений вытекает, что

- нулевой вектор коллинеарен, сонаправлен и противонаправлен с любым другим вектором.

**Определение**

Пусть даны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку $O$, отложим от нее вектор $\vec{a}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через $A$. От точки $A$ отложим вектор $\vec{b}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через $B$. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ изображает вектор, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}+\vec{b}$.

**Замечание об определении суммы векторов**

*Определение суммы векторов корректно, т. е. не зависит от выбора начальной точки $O$.*

Более точно, если мы в качестве $O$ возьмем другую точку $P$ и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, который сонаправлен отрезку $\overrightarrow{OB}$ и имеет с ним одинаковую длину (см. рисунок на следующем слайде). Следовательно, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{PR}$ — изображения одного и того же вектора.

# Сумма векторов (2)


Корректность определения суммы векторов

Сумму векторов можно определить и по-другому. Отложим вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной и той же точки $O$. Концы полученных направленных отрезков обозначим через $A$ и $B$ соответственно, а четвертую вершину параллелограмма со сторонами $OA$ и $OB$ — через $M$. Тогда вектор, соответствующий направленному отрезку $\overrightarrow{OM}$, будет равен $\vec{a}+\vec{b}$.
См. рисунок ниже, на котором слева вектор $\vec{a}+\vec{b}$ построен по определению (по «правилу треугольника»), а справа — описанным только что способом (по «правилу параллелограмма» ). Однако этот способ построения суммы векторов применим только к неколлинеарным векторам.


Два способа определения суммы векторов

Следующие свойства суммы векторов известны из школьного курса. Они легко проверяются, исходя из определения операции сложения.

### Свойства суммы векторов

*Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, то:*

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*сложение векторов* ***коммутативно***);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*сложение векторов* ***ассоциативно***);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

*Таким образом, множество всех векторов с операцией их сложения является абелевой группой. Нейтральным элементом этой группы является вектор $\vec{0}$, а вектором, обратным к $\vec{a}$, — вектор $-\vec{a}$.* □

Как и в любой группе с аддитивной записью операции, в группе векторов по сложению можно определить *разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ правилом: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

**Определение**

*Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* $t$ называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

1) $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\,\vec{a}|$;
2) если $t \geqslant 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$, а если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число часто объединяют термином *линейные операции над векторами*.

Следующие свойства произведения вектора на число известны из школьного курса. Они легко (хотя и несколько нудно) проверяются, исходя из определений операций умножения вектора на число и сложения векторов.

### Свойства произведения вектора на число

*Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора, а $t$ и $s$ — произвольные числа, то:*

1) $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a}+t\vec{b}$ (*умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов*);
2) $(t+s)\vec{a} = t\vec{a}+s\vec{a}$ (*умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел*);
3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$;
4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
5) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

**Определение**

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор. *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

При решении некоторых задач возникает необходимость найти орт данного вектора. В следующем замечании указано, как это можно сделать.

**Замечание об орте вектора**

*Если $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.*

*Доказательство.* Поскольку $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, из определения произведения вектора на число вытекает, что вектора $\vec{a}$ и $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ сонаправленны. Вновь используя определение произведения вектора на число, имеем

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Следовательно, вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ действительно является ортом вектора $\vec{a}$. $\square$

**Определение**

Переход от ненулевого вектора к его орту называется *нормированием*.

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

**Критерий коллинеарности векторов**

*Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа $t$.*

*Доказательство. Достаточность* непосредственно вытекает из определения произведения вектора на число.

*Необходимость.* По условию $|\vec{b}| \neq 0$. Поскольку $\vec{a} \parallel \vec{b}$, получаем, что либо $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, либо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Положим

$$t = \begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \upuparrows \vec{b}, \\ -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $t > 0$, и потому $t\vec{b} \upuparrows \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Таким образом, в любом случае вектора $\vec{a}$ и $t\vec{b}$ сонаправленны. Кроме того,

$$|t\vec{b}| = |t| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$. $\square$

Критерий коллинеарности векторов легко переформулировать так, чтобы в его посылке не было никаких ограничений на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

**Критерий коллинеарности векторов (альтернативная формулировка)**

*Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число $t$ такое, что либо $\vec{a} = t\vec{b}$, либо $\vec{b} = t\vec{a}$.*

*Доказательство.* Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличен от $\vec{0}$, то достаточно сослаться на критерий коллинеарности векторов в его стандартной формулировке. Если же $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, то для любого $t$ выполнены оба равенства $\vec{a} = t\vec{b}$ и $\vec{b} = t\vec{a}$. $\square$

Альтернативная формулировка критерия коллинеарности векторов оказывается неудобной для применения. Поэтому в дальнейшем мы, не оговаривая этого в явном виде, практически всегда будем ссылаться на ту формулировку этого критерия, которая дана на предыдущем слайде.

**Определение**

*Базисом плоскости* называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b})$.

Поскольку нулевой вектор по определению коллинеарен любому другому, получаем простое, но принципиально важное

**Замечание о нулевом векторе и базисе плоскости**

*Нулевой вектор не может входить в базис плоскости.* □

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса на плоскости, является следующая

**Теорема о разложении вектора по базису на плоскости**

*Пусть* $(\vec{a}, \vec{b})$ *— базис некоторой плоскости, а* $\vec{x}$ *— вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа* $t_1$ *и* $t_2$ *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующем слайде.

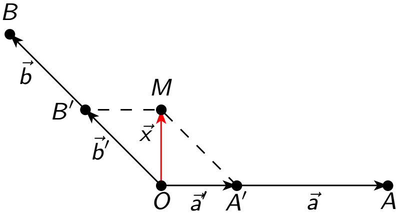
**Определение**

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b})$. Коэффициенты $t_1, t_2$ разложения (1) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ координаты $t_1, t_2$, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2)$.

*Доказательство.* Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки $O$ нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через $A$, $B$ и $M$ соответственно (см. рисунок на следующем слайде). Спроектируем точку $M$ на прямую $OA$ параллельно прямой $OB$ и на прямую $OB$ параллельно прямой $OA$. Обозначим полученные точки через $A'$ и $B'$ соответственно и положим $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$ и $\vec{b}' = \overrightarrow{OB'}$. Ясно, что $\vec{a}' \parallel \vec{a}$ и $\vec{b}' \parallel \vec{b}$. Поскольку $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ (см. замечание о нулевом векторе и базисе плоскости), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{a}' = t_1\vec{a}$ и $\vec{b}' = t_2\vec{b}$ для некоторых чисел $t_1$ и $t_2$. Тогда $\vec{x} = \vec{a}' + \vec{b}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$.

Существование чисел $t_1$ и $t_2$ с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b}$ для некоторых чисел $s_1$ и $s_2$. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (1), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b}$. Но тогда вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по критерию коллинеарности векторов, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$. $\square$

# Доказательство теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (рисунок)




Разложение вектора по базису на плоскости

**Определение**

Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости.

- Термин «компланарность» происходит от латинских корней «com» (придает значение совместности) и «planus» (плоский, ровный).

**Замечание о коллинеарности и компланарности**

*Любая тройка векторов, содержащая пару коллинеарных векторов, компланарна.* $\square$

**Определение**

*Базисом пространства* называется произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Из замечания о коллинеарности и компланарности следует, что в любом базисе пространства все вектора попарно неколлинеарны, и в частности, ненулевые.

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса в пространстве, является следующая теорема, аналогичная теореме о разложении вектора по базису на плоскости.

**Теорема о разложении вектора по базису в пространстве**

*Пусть* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *— базис пространства, а* $\vec{x}$ *— произвольный вектор. Тогда существуют, и притом единственные, числа* $t_1$, $t_2$ *и* $t_3$ *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}. \tag{2}$$

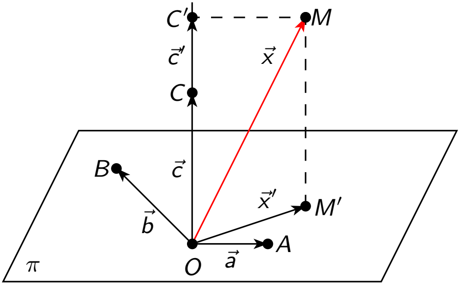
Доказательство этой теоремы будет приведено на следующих двух слайдах.

**Определение**

Равенство (2) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Коэффициенты $t_1, t_2, t_3$ разложения (2) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты $t_1, t_2, t_3$, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2, t_3)$.

*Доказательство.* Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки $O$ и обозначим концы полученных направленных отрезков через $A$, $B$, $C$ и $M$ соответственно (см. рисунок на следующем слайде). Поскольку вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, существует единственная плоскость $\pi$, проходящая через точки $O$, $A$ и $B$. Спроектируем точку $M$ на плоскость $\pi$ параллельно прямой $OC$ и на прямую $OC$ параллельно плоскости $\pi$. Обозначим полученные точки через $M'$ и $C'$ соответственно и положим $\vec{x}' = \overrightarrow{OM'}$ и $\vec{c}' = \overrightarrow{OC'}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{x}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ для некоторых чисел $t_1$ и $t_2$. Далее, ясно, что $\vec{c}' \parallel \vec{c}$. Поскольку $\vec{c} \neq \vec{0}$, из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{c}' = t_3\vec{c}$ для некоторого числа $t_3$. Тогда $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{c}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$.

Существование чисел $t_1$, $t_2$ и $t_3$ с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$ для некоторых чисел $s_1$, $s_2$ и $s_3$. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (2), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$. Но тогда вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$. $\square$




Разложение вектора по базису в пространстве

**Замечание о координатах векторов $\vec{x}+\vec{y}$ и $t\vec{x}$**

*Если вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в одном и том же базисе $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ координаты $(x_1,x_2,x_3)$ и $(y_1,y_3,y_3)$ соответственно, а $t$ — произвольное число, то вектор $\vec{x}+\vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты $(tx_1,tx_2,tx_3)$. Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.*

*Доказательство.* По определению координат вектора в пространстве имеют место равенства $\vec{x}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$ и $\vec{y}=y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y}&=(x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c})+(y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c})=\\&=(x_1+y_1)\vec{a}+(x_2+y_2)\vec{b}+(x_3+y_3)\vec{c},\\t\vec{x}&=t(x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c})=(tx_1)\vec{a}+(tx_2)\vec{b}+(tx_3)\vec{c}.\end{aligned}$$

Остается сослаться на определение координат вектора в пространстве. В случае плоскости доказательство абсолютно аналогично. $\square$

Итак, с помощью координат линейные операции над векторами плоскости (пространства) сводятся к обычным арифметическим операциям над парами (соответственно тройками) чисел.

Итак, с помощью координат линейные операции над векторами плоскости (пространства) сводятся к обычным арифметическим операциям над парами (соответственно тройками) чисел.
Эта простая, но исключительно продуктивная идея принадлежит французскому ученому Рене Декарту (1596–1650).

Итак, с помощью координат линейные операции над векторами плоскости (пространства) сводятся к обычным арифметическим операциям над парами (соответственно тройками) чисел.
Эта простая, но исключительно продуктивная идея принадлежит французскому ученому Рене Декарту (1596–1650).

По выражению другого французского математика, Гюстава Шоке (1915–2006), именно эта идея открыла тот «царский путь» в геометрию, которого не знал Евклид.