

# § 28. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Пусть дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

над полем  $F$ . Множество всех решений этой системы образует, как мы знаем, подпространство пространства  $F_n$ , называемое пространством решений системы (1). Основной целью данного параграфа является доказательство теоремы о размерности этого пространства. В ходе доказательства будет указан способ построения базиса пространства решений.

## Теорема 28.1

*Размерность пространства решений системы (1) равна  $n - r$ , где  $n$  — число неизвестных в системе, а  $r$  — ранг основной матрицы системы.*

**Доказательство.** Обозначим через  $A$  основную матрицу системы (1). В силу теоремы о ранге матрицы  $\text{rang } A$  по строкам равен  $r$ , и потому в  $A$  есть  $r$  линейно независимых векторов-строк, а любой набор из более, чем  $r$  ее векторов-строк линейно зависим. Для удобства обозначений будем считать, что первые  $r$  векторов-строк матрицы  $A$  линейно независимы. Если к этим векторам-строкам добавить любую из последующих векторов-строк матрицы  $A$ , полученный набор векторов-строк будет линейно зависим. В силу леммы 21.4 все векторы-строки, начиная с  $(r+1)$ -й, являются линейными комбинациями первых  $r$  векторов-строк. Следовательно, все уравнения системы (1), начиная с  $(r+1)$ -го, являются следствиями первых  $r$  уравнений. Вычеркнув все уравнения, начиная с  $(r+1)$ -го, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

равносильную системе (1). Обозначим основную матрицу системы (2) через  $A'$ . Ясно, что  $\text{rang } A'$  по строкам равен  $r$ . В силу теоремы о ранге матрицы, ее  $\text{rang}$  по столбцам также равен  $r$ . Следовательно,  $r \leq n$ .





В итоге мы получим следующий набор решений этой системы:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1r}, 1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{f}_2 &= (f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2r}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{f}_{n-r} &= (f_{n-r1}, f_{n-r2}, \dots, f_{n-rr}, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Докажем, что решения  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$  образуют базис пространства решений системы (3), а следовательно и пространства решений системы (1). Поскольку число этих решений равно  $n - r$ , тем самым доказательство теоремы будет завершено. Запишем векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$  в матрицу по строкам и обозначим эту матрицу через  $F$ . Ясно, что на пересечении всех строк матрицы  $F$  и последних  $n - r$  ее столбцов стоит единичная матрица. Следовательно, матрица  $F$  имеет ненулевой минор порядка  $n - r$ . Миноров большего порядка в матрице  $F$  нет. Следовательно, ее ранг по минорам равен  $n - r$ . В силу теоремы о ранге матрицы, ранг  $F$  по строкам также равен  $n - r$ . Поскольку число строк этой матрицы равно  $n - r$ , все ее векторы-строки, т. е. векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$ , линейно независимы. В силу леммы 22.1 осталось показать, что всякое решение системы (1) есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$ . Пусть  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  — произвольное решение системы (3).



## Определение

Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Если однородная система имеет единственное решение, то это решение является нулевым, а значит, пространство решений этой системы является нулевым пространством. Как отмечалось в § 22, нулевое векторное пространство не имеет базиса. Таким образом, справедливо следующее

## Замечание 28.1

*Если однородная система линейных уравнений имеет единственное решение, то фундаментального набора решений этой системы не существует.*

Если же однородная система является неопределенной, то, найдя ее фундаментальную систему решений, мы, фактически, найдем все ее решения, поскольку, по теореме о разложении вектора по базису, любое решение системы является линейной комбинацией решений, входящих в фундаментальную систему решений.



# Число векторов в фундаментальной системе решений и число свободных переменных

Согласно замечанию 6.2, если система линейных уравнений является неопределенной, то число ее свободных переменных равно  $n - r$ , где  $n$  — число неизвестных в системе, а  $r$  — число ненулевых строк в матрице, полученной из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду. Сопоставляя этот факт с алгоритмом 27.1 и теоремой 28.1, мы получаем следующий факт, полезный при решении конкретных систем линейных уравнений.

## Замечание 28.2

*Если однородная система линейных уравнений является неопределенной, то число векторов в фундаментальной системе решений этой системы равно числу ее свободных переменных.* □

## О нахождении фундаментальной системы решений (1)

Предположим, что мы решаем систему линейных уравнений с  $n$  неизвестными, из которых  $r$  первых являются связанными, а  $n - r$  последних — свободными. В силу замечания 28.2 фундаментальная система решений нашей системы состоит из  $n - r$  векторов. Обозначим входящие в нее векторы через  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$ . Чтобы найти эти векторы, мы должны заполнить табл. 1. В этой таблице свободные переменные выделены красным цветом, а соответствующие им клетки таблицы — зеленым.

Табл. 1. Таблица для фундаментальной системы решений

	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$x_{r+1}$	$x_{r+2}$	$\dots$	$x_n$
$\mathbf{f}_1$							$\dots$	
$\mathbf{f}_2$							$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbf{f}_{n-r}$							$\dots$	

## О нахождении фундаментальной системы решений (2)

В доказательстве теоремы 28.1 «зеленые» клетки из табл. 1 заполнялись так, как указано в табл. 2.

Табл. 2. Нахождение фундаментальной системы решений

	$x_1$	$x_2$	.....	$x_r$	$x_{r+1}$	$x_{r+2}$	.....	$x_n$
$f_1$					1	0	.....	0
$f_2$					0	1	.....	0
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$f_{n-r}$					0	0	.....	1

Иными словами, на место квадратной матрицы, которую образуют эти зеленые клетки, вписывалась единичная матрица. Иногда при решении конкретных систем буквальное следование этому алгоритму может привести к достаточно громоздким вычислениям. Поэтому полезно иметь в виду следующее замечание.

- *На место квадратной матрицы, соответствующей свободным переменным, можно вписывать не только единичную матрицу, но и произвольную невырожденную квадратную матрицу порядка  $n - r$ .*

## О нахождении фундаментальной системы решений (3)

В самом деле, это гарантирует наличие в матрице размера  $(n - r) \times n$ , в которой по строкам записаны векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$ , ненулевого минора порядка  $n - r$ . Следовательно, ранг этой матрицы по минорам равен  $n - r$ . В силу теоремы о ранге, ее ранг по строкам тоже равен  $n - r$ . Это означает, что все векторы-строки нашей матрицы, т. е. векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$ , линейно независимы. Эти векторы являются решениями исходной однородной системы. По теореме 28.1 их число равно размерности пространства решений этой системы. Из замечания 22.7 вытекает, что они образуют базис пространства ее решений.

Знание фундаментальной системы решений однородной системы позволяет записать ее общее решение в векторном виде. А именно, если  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$  — фундаментальная система решений (т. е. базис пространства решений) однородной системы, то общее решение системы совпадает с множеством всех векторов вида  $c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \dots + c_k\mathbf{f}_k$ , где  $c_1, c_2, \dots, c_k$  — произвольные скаляры. Более того, сказанное выше позволяет находить общее решение и неоднородной системы линейных уравнений. В самом деле, предположим, что нам дана произвольная неопределенная система линейных уравнений. Предположим, что  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$  — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Предположим также, что мы нашли (например, с помощью метода Гаусса) одно частное решение  $\mathbf{f}_0$  заданной неоднородной системы. В силу теоремы 5.1 общее решение этой системы совпадает с множеством всех векторов вида

$$\mathbf{f}_0 + c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \dots + c_k\mathbf{f}_k.$$

Это выражение называется *векторной записью общего решения системы линейных уравнений*.