

# § 26. Обратная матрица

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## Определение

Пусть  $A$  — произвольная матрица. Матрица  $B$  называется *обратной* к  $A$ , если  $AB = BA = E$ , где  $E$  — единичная матрица. Если матрица, обратная к  $A$ , существует, то матрица  $A$  называется *обратимой*. Матрица, обратная к  $A$ , обозначается через  $A^{-1}$ .

В определении ничего не говорится о размерах матрицы  $A$  и обратной к ней матрицы.

## Замечание 26.1

*Если матрица  $A$  обратима, то она является квадратной матрицей, а обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и  $A$ .*

**Доказательство.** Обозначим матрицу, обратную к  $A$ , через  $B$ . Пусть  $A \in R^{m \times n}$ , а  $B \in R^{r \times s}$ . Из существования произведения  $AB$  вытекает, что  $n = r$ , а из существования произведения  $BA$  — что  $m = s$ . Но тогда  $AB \in R^{m \times m}$ , а  $BA \in R^{n \times n}$ . Поскольку  $AB = E = BA$ , получаем, что  $m = n$ . Таким образом,  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы порядка  $n$ .  $\square$

## Теорема 26.1

Пусть  $A$  — квадратная матрица.

- 1) *(критерий обратимости матрицы)* Матрица, обратная к  $A$ , существует тогда и только тогда, когда матрица  $A$  невырождена.
- 2) Если матрица  $A$  невырождена, то матрица, обратная к  $A$ , единственна и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^T. \quad (1)$$

**Доказательство.** 1) *Необходимость.* Предположим, что  $|A| = 0$  и существует матрица  $B$ , обратная к  $A$ . Тогда  $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$  по теореме 25.1. С другой стороны, из определения обратной матрицы вытекает, что  $|AB| = |E| = 1$ . Полученное противоречие доказывает необходимость.

## Критерий обратимости матрицы (2)

*Достаточность.* Предположим, что матрица  $A$  невырождена. Положим  $B = \frac{1}{|A|} \cdot (A^\vee)^\top$ . Докажем, что матрица  $B$ , обратна к  $A$ . В самом деле, используя замечание 25.1, получаем, что

$$AB = A \cdot \left( \frac{1}{|A|} \cdot (A^\vee)^\top \right) = \frac{1}{|A|} \cdot (A \cdot (A^\vee)^\top) = \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot E = E,$$

и, аналогично,  $BA = E$ . Итак, матрица  $B$  обратна к  $A$ . Тем самым мы завершили доказательство п. 1).

2) Единственность обратной матрицы в специальной проверке не нуждается, так как вытекает из леммы 3.1, а тот факт, что матрица  $\frac{1}{|A|} \cdot (A^\vee)^\top$ , обратна к  $A$ , доказан выше. □

Из сказанного выше вытекает, что

- совокупность всех невырожденных квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $F$  с операцией умножения матриц образует группу. Нейтральным элементом этой группы является единичная матрица порядка  $n$ .

Матрица  $B$ , обратная к  $A$ , должна удовлетворять двум равенствам:  $AB = E$  и  $BA = E$ . Следующее утверждение показывает, однако, что на практике достаточно проверять одно из них.

### Замечание 26.2

Пусть  $A$  — квадратная матрица, а матрица  $B$  такова, что  $AB = E$ . Тогда матрица  $A$  обратима и  $B = A^{-1}$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 25.1  $|A| \cdot |B| = |AB| = |E| = 1$ . В частности, отсюда следует, что  $|A| \neq 0$ . Из теоремы 26.1 теперь вытекает, что матрица  $A$  обратима. Умножая обе части равенства  $AB = E$  слева на  $A^{-1}$ , получим  $A^{-1}(AB) = A^{-1}E$ . Но  $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$ , а  $A^{-1}E = A^{-1}$ . Таким образом,  $B = A^{-1}$ . □

## Свойства обратной матрицы

Если  $A$  и  $B$  — невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка над полем  $F$ ,  $t \in F$  и  $t \neq 0$ , то:

- 1)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- 2)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
- 3)  $(tA)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot A^{-1}$ ;
- 4)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;
- 5)  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

**Доказательство.** Свойства 1) и 2) являются частными случаями общих свойств обратных элементов, указанных в §3. Свойство 3) вытекает из замечания 26.2 и того, что

$$(tA) \cdot \left(\frac{1}{t} \cdot A^{-1}\right) = \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot (AA^{-1}) = 1 \cdot E = E.$$

Свойство 4) легко вытекает из формулы (1) и 1-го свойства определителей. Используя теорему 25.1, имеем

$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$ . Это доказывает свойство 5).



Один из способов вычисления обратной матрицы дает формула (1). Эту формулу удобно применять при  $n = 2$ : легко проверяется, что в этом случае она принимает следующий простой вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Но при больших  $n$  этот способ требует выполнения большого объема вычислений, который к тому же очень быстро растет с ростом порядка матрицы: если матрица  $A$  имеет порядок  $n$ , то необходимо сосчитать один определитель  $n$ -го порядка и  $n^2$  определителей  $(n - 1)$ -го порядка. На следующем слайде будет указан менее трудоемкий способ нахождения обратной матрицы. При этом способе не требуется вычислять ни одного определителя, а с ростом  $n$  объем необходимых вычислений растет медленно.

# Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Матрица, обратная к матрице  $A$ , есть не что иное, как решение уравнения  $AX = E$ , где  $A$  — невырожденная квадратная матрица. Из алгоритма 25.2 вытекает

## Алгоритм 26.1 (алгоритм нахождения обратной матрицы)

Пусть  $A$  — невырожденная квадратная матрица порядка  $n$ . Запишем матрицу  $(A | E)$  размера  $n \times 2n$ . С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые  $n$  столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних  $n$  столбцах) полученной матрицы будет записана матрица  $A^{-1}$ .



## Обратная матрица, системы линейных уравнений и матричные уравнения

Рассмотрим матричное уравнение вида  $AX = B$ , где  $A$  — невырожденная квадратная матрица. Умножив обе его части слева на матрицу  $A^{-1}$  (существующую в силу критерия обратимости матрицы), получим слева  $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$ , а справа —  $A^{-1}B$ . Таким образом, рассматриваемое уравнение решается по формуле  $X = A^{-1}B$ . Аналогично проверяется, что уравнение вида  $XA = B$ , где  $A$  — невырожденная квадратная матрица, решается по формуле  $X = BA^{-1}$ , а уравнение вида  $AXB = C$ , где  $A$  и  $B$  — невырожденные квадратные матрицы, — по формуле  $X = A^{-1}CB^{-1}$ .

Особый интерес представляет первое из рассмотренных в предыдущем абзаце уравнений, т. е. уравнение  $AX = B$ , в случае, когда  $B$  (а значит и  $X$ ) — матрица, состоящая из одного столбца. Как мы знаем, в этом случае  $AX = B$  — это матричная запись системы линейных уравнений с основной матрицей  $A$ . Тот факт, что матрица  $A$  квадратна, означает, что эта система является крамеровской. Если  $|A| \neq 0$ , то по теореме Крамера система имеет единственное решение. В силу сказанного выше, это решение может быть найдено по формуле  $X = A^{-1}B$ .