§ 24. Ранг матрицы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

24.1. Теорема о ранге

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $m \times n$ над полем F. Векторы, компонентами которых являются элементы строк матрицы A, т. е. векторы вида $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, называются *векторами-строками* матрицы A. Аналогично, векторы, компонентами которых являются элементы столбцов матрицы A, т. е. векторы вида $\mathbf{a}^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, называются *векторами-столбцами* матрицы A.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ принадлежат пространству F^n, а векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ — пространству F^m.

Определение

Рангом матрицы по строкам [*по столбцам*] называется размерность подпространства, порожденного векторами-строками [векторами-столбцами] этой матрицы. Ранг матрицы A по строкам [по столбцам] обозначается через $r_s(A)$ [соответственно, $r_c(A)$].

Минор матрицы (определение)

Определение

Минором матрицы A называется определитель квадратной матрицы, стоящей на пересечении некоторых строк и столбцов этой матрицы. *Порядком* минора называется порядок той матрицы, определителем которой этот минор является.

Если $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, то всякий ее минор есть определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

где $k \leqslant \min\{m, n\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n$. Порядок указанного минора равен k.

Минор матрицы (комментарии). Ранг матрицы по минорам

- Одна и та же матрица может иметь много различных миноров одного и того же порядка.
- Всякий элемент произвольной матрицы A является ее минором 1-го порядка. В частности, если $A \neq O$, то в A есть ненулевые миноры.
- Определитель квадратной матрицы порядка n является ее (единственным) минором n-го порядка.
- Введенное в § 6 понятие минора элемента квадратной матрицы является частным случаем введенного на предыдущем слайде понятия минора матрицы: если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, а $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то минор M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A является минором $(n-1)$-го порядка этой матрицы.

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Если $A \neq O$, то *рангом матрицы A по минорам* называется наибольший из порядков ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по минорам по определению равен 0. Ранг матрицы A по минорам обозначается через $r_m(A)$.

Бóльшая часть данного параграфа будет посвящена доказательству следующего фундаментального результата.

Теорема 24.1 (теорема о ранге матрицы)

Пусть A — произвольная матрица над полем. Ранг матрицы A по строкам равен ее рангу по столбцам и равен ее рангу по минорам.

Эта теорема легко вытекает из сформулированных на следующем слайде четырех лемм, доказательства которых будут приведены ниже. Во всех этих леммах мы, не оговаривая этого в явном виде, мы будем считать, что речь идет о матрицах над полем. Чтобы сделать формулировки лемм менее громоздкими, введем следующее определение. Умножение строки матрицы на ненулевой скаляр, прибавление одной строки к другой и перестановку строк будем называть *основными элементарными преобразованиями* матрицы.

Четыре леммы

Лемма 24.1

Основные элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга по строкам.

Лемма 24.2

Ранг ступенчатой матрицы по строкам равен числу ее ненулевых строк.

Лемма 24.3

Основные элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга по минорам.

Лемма 24.4

Ранг ступенчатой матрицы по минорам равен числу ее ненулевых строк.

Теорема о ранге матрицы: редукция к леммам 24.1–24.4

Прежде, чем доказывать эти леммы, покажем, как из них выводится теорема о ранге матрицы. Пусть A — произвольная матрица над полем. Из доказательства предложения 5.2 вытекает, что существует ступенчатая матрица, полученная из матрицы A с помощью основных элементарных преобразований. Обозначим эту матрицу через B, а число ее ненулевых строк — через k. Тогда:

$$
\begin{aligned}
r_s(A) &= r_s(B) && \text{в силу леммы 24.1}\\
&= k && \text{в силу леммы 24.2}\\
&= r_m(B) && \text{в силу леммы 24.4}\\
&= r_m(A) && \text{в силу леммы 24.3.}
\end{aligned}
$$

Таким образом, ранг произвольной матрицы по строкам равен ее рангу по минорам. Далее,

$$
\begin{aligned}
r_c(A) &= r_s(A^\top) && \text{это равенство очевидно}\\
&= r_m(A^\top) && \text{в силу сказанного выше}\\
&= r_m(A) && \text{в силу 1-го свойства определителей.}
\end{aligned}
$$

Таким образом, ранг A по столбцам равен рангу A по минорам (а значит, и рангу A по строкам).

Перейдем к доказательствам сформулированных выше лемм.

Доказательство леммы 24.1. Пусть A — произвольная матрица, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из трех основных элементарных преобразований. Обозначим векторы-строки матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, а векторы-строки матрицы B — через $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$. Положим $V_A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$ и $V_B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m \rangle$. Требуется доказать, что выполнено равенство $\dim V_A = \dim V_B$. Покажем, что на самом деле верно даже более сильное равенство $V_A = V_B$. Рассмотрим три случая.

Случай 1: B получена из A умножением i-й строки матрицы A на ненулевой скаляр t. В этом случае $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$, $j \neq i$ и $\mathbf{b}_i = t\mathbf{a}_i$. Ясно, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ лежит в V_A, и потому $V_B \subseteq V_A$. С другой стороны, каждый из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ лежит в V_B (для всех векторов, кроме $\mathbf{a}_i$, это очевидно, а для $\mathbf{a}_i$ вытекает из того, что $\mathbf{a}_i = \frac{1}{t} \cdot \mathbf{b}_i$). Следовательно, $V_A \subseteq V_B$, и потому $V_A = V_B$.

Доказательство леммы 24.1 (2)

Случай 2: B получена из A прибавлением j-й строки матрицы A к ее i-й строке. В этом случае $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$, $k \neq i$ и $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$. Как и в предыдущем случае, ясно, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ лежит в V_A, и потому $V_B \subseteq V_A$. Остается справедливым и обратное утверждение: каждый из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ лежит в V_B (для всех векторов, кроме $\mathbf{a}_i$, это очевидно, а для $\mathbf{a}_i$ вытекает из того, что $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$). Следовательно, $V_A \subseteq V_B$, и потому $V_A = V_B$.

Случай 3: B получена из A перестановкой строк. В этом случае пространства V_A и V_B порождаются одними и теми же векторами, и потому совпадают. $\square$

Доказательство леммы 24.2. Пусть $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, число ненулевых строк которой равно k. Очевидно, что любой набор из более чем k векторов-строк матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк) содержит нулевой вектор и потому линейно зависим. Следовательно, $r_s(A) \leqslant k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что первые k векторов-строк матрицы A линейно независимы. Матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1i_1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{1n} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & a_{2i_2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & a_{ki_k} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ki_k} \neq 0$. Обозначим первые k векторов-строк матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Предположим, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \qquad (2)$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Доказательство леммы 24.2 (2)

Приравнивая в этом векторном равенстве компоненты с номерами i_1, i_2, $\dots$, i_k, мы получим следующую крамеровскую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{1i_1}t_1 & & & & = 0, \\ a_{1i_2}t_1 & + a_{2i_2}t_2 & & & = 0, \\ a_{1i_3}t_1 & + a_{2i_3}t_2 & + a_{3i_3}t_3 & & = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{1i_1}t_1 & + a_{2i_k}t_2 & + a_{3i_k}t_3 & + \dots + a_{ki_k}t_k & = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы вытекает, что $t_1 = 0$. Отсюда и из второго уравнения системы получаем, что $t_2 = 0$. Продолжая подставлять уже найденные значения неизвестных в последующие уравнения системы, находим, что $t_3 = 0$, $t_4 = 0$, $\dots$, $t_k = 0$. Таким образом, из равенства (??) вытекает, что $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\dots$, $\mathbf{a}_k$ линейно независимы. $\square$

Из доказательства леммы 24.2 вытекает

Замечание 24.1

Ненулевые векторы-строки ступенчатой матрицы линейно независимы. $\square$

Доказательство леммы 24.3. Вновь предположим, что A — произвольная матрица, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из трех основных элементарных преобразований. Пусть M — произвольный минор матрицы A. Матрицу, определителем которой является минор M, будем обозначать через A_M. Если матрица A_M расположена в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$ матрицы A, то определитель матрицы, расположенной в строках и столбцах матрицы B с теми же номерами, обозначим через M'. Ясно, что M' — минор матрицы B, и порядки миноров M и M' совпадают. Рассмотрим те же три случая, что и в доказательстве леммы 24.1.

Случай 1: B получена из A умножением i-й строки матрицы A на ненулевой скаляр t. Пусть M — произвольный минор матрицы A. Если матрица A_M не содержит элементов i-й строки матрицы A, то $M' = M$. В противном случае 2-е свойство определителей влечет, что $M' = tM$. Учитывая, что $t \neq 0$, получаем, что $M = 0$ тогда и только тогда, когда $M' = 0$. Следовательно, максимальные порядки ненулевых миноров в матрицах A и B совпадают, и потому $r_m(A) = r_m(B)$.

Доказательство леммы 24.3 (2)

Случай 2: B получена из A прибавлением j-й строки матрицы A к ее i-й строке. Пусть M — ненулевой минор k-го порядка матрицы A. Покажем, что в матрице B тоже есть ненулевой минор k-го порядка. Если матрица A_M не содержит элементов i-й строки матрицы A, то $M' = M \neq 0$. Если A_M содержит элементы как i-й, так и j-й строки матрицы A, то, в силу 7-го свойства определителей, вновь получаем, что $M' = M \neq 0$. Предположим, наконец, что A_M содержит элементы i-й строки матрицы A, но не содержит элементов ее j-й строки. Если $M' \neq 0$, то нужный нам факт установлен. Пусть теперь $M' = 0$. Будем для простоты предполагать, что матрица A_M расположена в первых k строках и первых k столбцах матрицы A, $i = 1$ и $j = k + 1$ (в общем случае доказательство вполне аналогично).

Доказательство леммы 24.3 (3)

Используя 6-е свойство определителей, мы получаем, что

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{k+1\,1} & a_{12} + a_{k+1\,2} & \dots & a_{1k} + a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= M + \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Обозначим последний из определителей, возникших в этой цепочке равенств, через D. Поскольку $M + D = M' = 0$, имеем

$$D = \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = -M \neq 0. \qquad (3)$$

Доказательство леммы 24.3 (4)

В матрице, определитель которой мы обозначили через D, поменяем местами сначала первую и вторую строки, затем вторую и третью строки, ..., наконец, $(k-1)$-ю и k-ю строки. В результате, сделав $k-1$ перестановку строк, мы получим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,k} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель является минором k-го порядка матрицы B (матрица, определителем которой он является, расположена в первых k столбцах и в строках со второй по $(k+1)$-ю матрицы B). Обозначим этот минор через D'. Равенство (**??**) и 4-е свойство определителей влекут, что $D' = (-1)^{k-1}D = (-1)^k M \neq 0$. Таким образом, матрица B содержит ненулевой минор порядка k.

Доказательство леммы 24.3 (5)

Итак, если матрица A содержит ненулевой минор k-го порядка, то тем же свойством обладает и матрица B. Следовательно, максимальный порядок ненулевого минора матрицы B не может быть меньше, чем максимальный порядок ненулевого минора матрицы A. Иными словами, $r_m(A) \leqslant r_m(B)$. Чтобы доказать противоположное неравенство, заметим, что матрица A может быть получена из матрицы B последовательным выполнением трех элементарных преобразований: умножением j-й строки матрицы B на -1, прибавлением j-й строки полученной матрицы к ее i-й строке и повторным умножением j-й строки полученной после этого матрицы на -1. Первая и третья из этих операций, как было установлено при разборе случая 1), не меняют ранга матрицы по минорам, а вторая, как мы только что убедились, может разве лишь увеличить его. Следовательно, $r_m(B) \leqslant r_m(A)$ и потому $r_m(A) = r_m(B)$.

Случай 3: B получена из A перестановкой строк. В силу 4-го свойства определителей всякий минор матрицы B с точностью до знака равен некоторому минору матрицы A. Отсюда с очевидностью вытекает, что максимальные порядки ненулевых миноров у матриц A и B совпадают. □

Доказательство леммы 24.4. Вновь предположим, что $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, число ненулевых строк которой равно k. Очевидно, что любой минор более чем k-го порядка матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк и более k столбцов) является определителем матрицы, которая содержит нулевую строку, и потому равен 0 по 3-му свойство определителей. Следовательно, $r_m(A) \leqslant k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что матрица A имеет ненулевой минор порядка k. Пусть матрица A имеет вид (**??**), где $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ki_k} \neq 0$. Матрица, расположенная в первых k строках матрицы A и столбцах этой матрицы с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ является верхнетреугольной, и все элементы на ее главной диагонали отличны от 0. Следовательно, определитель этой матрицы, являющийся минором k-го порядка матрицы A, отличен от 0. $\square$

Мы завершили доказательство теоремы о ранге матрицы. $\square$

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Теорема о ранге матрицы позволяет ввести следующее

Определение

Рангом матрицы называется число, равное любому из трех ее вышеопределенных рангов. Ранг матрицы A мы будем обозначать через $r(A)$.

Из лемм 24.1 и 24.2 вытекает следующий

Алгоритм 24.1

Приведем данную матрицу к ступенчатому виду. Число ненулевых строк в полученной матрице равно рангу исходной матрицы.

Обоснование алгоритма 20.2

В § 20 был приведен без обоснования следующий алгоритм определения линейной зависимости или независимости системы векторов (см. там алгоритм 20.2): запишем в матрицу по строкам координаты этих векторов в некотором базисе и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если в процессе элементарных преобразований возникнет нулевая строка, система линейно зависима, в противном случае она линейно независима. Обоснуем этот алгоритм. При приведении матрицы к ступенчатому виду мы заменяем каждую строку матрицы на нетривиальную линейную комбинацию ее строк. Поэтому возникновение нулевой строки означает, что векторы-строки исходной матрицы линейно зависимы. Если же нулевых строк не возникло, то в силу лемм 24.1 и 24.2 размерность пространства, порожденного векторами-строками исходной матрицы равна числу этих строк, а значит эти векторы-строки линейно независимы.

Обоснование алгоритма 21.1

В § 21 был приведен без обоснования алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов (см. там алгоритм 21.1). Напомним, в чем он состоит. Запишем в матрицу по строкам координаты данных векторов в некотором базисе. Обозначим эту матрицу через A и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности. Теперь мы в состоянии обосновать этот алгоритм. В самом деле, в силу алгоритма 24.1 число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы равно рангу матрицы A по строкам, т. е. размерности пространства, порожденного ее векторами-строками. Далее, в силу замечания 24.1 ненулевые векторы-строки полученной нами ступенчатой матрицы линейно независимы, а в силу леммы 24.2 число этих ненулевых строк равно размерности пространства, порожденного всеми векторами-строками матрицы A. В силу замечания 19.7 эти ненулевые векторы-строки образуют базис пространства, порожденного всеми векторами-строками матрицы A.

24.2. Ранг произведения матриц

Нашей следующей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 24.2

Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $k \times \ell$, а $B = (b_{ij})$ — матрица размера $\ell \times m$. Положим $C = AB$. По определению произведения матриц, первый столбец матрицы C имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1\ell}b_{\ell 1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2\ell}b_{\ell 1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \cdots + a_{k\ell}b_{\ell 1} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{11} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + b_{21} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{\ell 1} \cdot \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ a_{2\ell} \\ \dots \\ a_{k\ell} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Аналогичное утверждение можно получить и для любого другого столбца матрицы C. Итак, все столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Следовательно, подпространство, порожденное векторами-столбцами матрицы C, содержится в подпространстве, порожденном векторами-столбцами матрицы A. Размерность первого подпространства не превосходит поэтому размерности второго. Это означает, что ранг по столбцам матрицы C не превосходит ранга по столбцам матрицы A, т. е. $r(C) \leqslant r(A)$.

Рассуждая аналогично, легко убедиться в том, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B. Отсюда вытекает неравенство $r(C) \leqslant r(B)$. $\square$

Ранг произведения матриц (частный случай)

В некоторых случаях ранг произведения матриц оказывается равным рангу одного из сомножителей. Укажем один из таких случаев.

Следствие 24.1

Пусть A — невырожденная квадратная матрица, а B — произвольная матрица. Если существует произведение AB, то $r(AB) = r(B)$. Если существует произведение BA, то $r(BA) = r(B)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение следствия. Положим $C = AB$. По теореме 24.2 $r(C) \leqslant r(B)$. В силу критерия обратимости матрицы существует матрица A^{-1}. Равенство $C = AB$ умножим слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}C = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B,$$

т. е. $B = A^{-1}C$. Применяя теорему 24.2 к последнему равенству получаем неравенство $r(B) \leqslant r(C)$. Следовательно, $r(B) = r(C)$. Второе утверждение следствия проверятся аналогично, надо только произведение BA умножить на A^{-1} справа. □

24.3. Теорема Кронекера–Капелли

В заключение параграфа докажем следующее утверждение, показывающее, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений.

Теорема 24.3 (теорема Кронекера–Капелли или критерий совместности системы линейных уравнений)

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим ее основную матрицу через A, а расширенную — через B. Векторы-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$, а столбец свободных членов — через $\mathbf{b}$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B, — через V_B.

Заметим, что система (??) может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + \cdots + x_n\mathbf{a}^n = \mathbf{b}$. Следовательно, система (??) совместна в том и только в том случае, когда вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, т. е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система (??) совместна. Тогда вектор $\mathbf{b}$ принадлежит пространству V_A. Это значит, что векторы-столбцы матрицы B принадлежат V_A, и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B. Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т. е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B. В силу теоремы о ранге матрицы ранги матриц A и B равны.

Теорема Кронекера–Капелли (3)

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т. е. из векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^r$. Эти векторы принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^r$ образуют базис пространства V_B. Вектор $\mathbf{b}$ принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^r$, а значит и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система (**??**) совместна. $\square$

Теорема Кронекера–Капелли, комментарии (1)

Отметим, что теорему Кронекера–Капелли легко вывести уже из метода Гаусса. В самом деле, как мы видели в § 5, *система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда при приведении ее расширенной матрицы к ступенчатому виду не возникает строки, в которой все элементы, кроме последнего, равны* 0, *а последний элемент отличен от* 0. Это, очевидно, равносильно тому, что *при приведении к ступенчатому виду основной и расширенной матриц системы получатся матрицы с одинаковым числом ненулевых строк*. С учетом алгоритма 24.1, это, в свою очередь, равносильно тому, что *ранги основной и расширенной матриц системы равны*.

Таким образом, теорема Кронекера–Капелли не дает ничего нового по сравнению с методом Гаусса для анализа той или иной конкретной системы. Но она чрезвычайно полезна с теоретической точки зрения, так как используется в доказательствах большого числа важных утверждений, причем не только в алгебре, но и в других разделах математики.

Теорема Кронекера–Капелли, комментарии (2)

Теорема 24.3 многократно переоткрывалась разными авторами и, как следствие, известна под разными названиями. В этих названиях фигурирует целый ряд фамилий. Помимо Кронекера и Капелли, это Руше, Фонтене, Фробениус. Но ни в одном из названий не упоминается фамилия первооткрывателя. Первым эту теорему опубликовал в 1867 г. английский математик, поэт и прозаик Чарльз Лютвидж Доджсон, более известный под литературным псевдонимом Льюис Кэрролл — автор «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье».