

§ 23. Подпространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

23.1. Определение и примеры подпространств

Поскольку, как отмечалось в § 21, векторные пространства являются универсальными алгебрами, к ним можно применять понятие подалгебры, введенное в § 3. Для облегчения восприятия дальнейшего материала, укажем явно, какой вид принимает это понятие в случае векторных пространств.

Определение

Непустое подмножество M векторного пространства V над полем F называется *подпространством* пространства V , если выполняются следующие условия:

- 1) если $x, y \in M$, то $x + y \in M$ (*замкнутость подпространства относительно сложения векторов*);
- 2) если $x \in M$, а $t \in F$, то $tx \in M$ (*замкнутость подпространства относительно умножения вектора на скаляр*).

Примеры подпространств (1)

Приведем ряд примеров подпространств.

Пример 1. Пусть V — произвольное векторное пространство. Очевидно, что все пространство V и множество $M = \{0\}$ являются подпространствами в V . Второе из них называется *нулевым подпространством*.

Следующее утверждение показывает, что нулевое подпространство содержится в любом другом подпространстве векторного пространства.

Замечание 23.1

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве M пространства V .

Доказательство. Если x — произвольный вектор из M , то, по условию 2) из определения подпространства, $0 = 0 \cdot x \in M$. □

Пример 2. Пусть V — обычное трехмерное пространство, а M — множество векторов из V , коллинеарных некоторой плоскости π . Ясно, что сумма двух векторов, коллинеарных π , и произведение вектора, коллинеарного π , на любое число коллинеарны π . Следовательно, M — подпространство в V . Аналогично доказывается, что подпространством в V является и множество векторов, коллинеарных некоторой прямой ℓ .

Пример 3. Векторное пространство многочленов над полем \mathbb{Q} является подпространством векторного пространства многочленов над полем \mathbb{R} , а векторное пространство многочленов над полем \mathbb{R} — подпространством векторного пространства многочленов над полем \mathbb{C} .

Пример 4. Ясно, что сумма двух верхнетреугольных матриц одного и того же порядка n над полем F и произведение всякой такой матрицы на произвольный скаляр $t \in F$ являются верхнетреугольными матрицами порядка n над F . Поэтому множество всех верхнетреугольных матриц порядка n над F образует векторное пространство, которое является подпространством пространства всех квадратных матриц порядка n над F .

Пример 5. В силу теоремы 5.1 общее решение произвольной однородной системы линейных уравнений с n неизвестными над полем F есть подпространство пространства F_n .

Пример 6. Пусть V — произвольное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Обозначим через M множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Проверим, что M — подпространство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, т. е. $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых скаляров s_1, s_2, \dots, s_k и t_1, t_2, \dots, t_k . Пусть, далее, t — произвольный скаляр. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k) + (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= (s_1 + t_1)\mathbf{a}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (s_k + t_k)\mathbf{a}_k, \\ t\mathbf{x} &= t(s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k) = (ts_1)\mathbf{a}_1 + (ts_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (ts_k)\mathbf{a}_k.\end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} \in M$, т. е. M — подпространство пространства V . Оно называется *подпространством, порожденным векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$* , или *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ и обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$.

Ясно, что если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — система порождающих (в частности, базис) пространства V , то $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = V$. Таким образом,

- любое подпространство конечномерного векторного пространства является подпространством, порожденным некоторым набором векторов (например, своим базисом).

Замечание 23.2

Пусть V — векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Тогда $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ — наименьшее подпространство пространства V , содержащее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. Пусть M — подпространство пространства V , содержащее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Из определения подпространства вытекает, что любая линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ лежит в M . Следовательно, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq M$. □

Очевидно, что подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Это позволяет говорить о размерности и базисе подпространства.

Предложение 23.1

Пусть M — подпространство векторного пространства V . Тогда $\dim M \leq \dim V$, причем $\dim M = \dim V$ тогда и только тогда, когда $M = V$.

Доказательство. Если M или V — нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что M и V — ненулевые пространства. Зафиксируем базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ подпространства M и базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ пространства V . Если $k > \ell$, то в силу леммы 22.2 система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. Но это противоречит определению базиса. Следовательно, $k \leq \ell$, т. е. $\dim M \leq \dim V$.

Пусть теперь $\dim M = \dim V$, т. е. $k = \ell$. Тогда система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ является максимальной линейно независимой в пространстве V . В самом деле, в противном случае существует вектор $\mathbf{b} \in V$ такой, что система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ линейно независима. Но она содержит $k + 1 = \ell + 1$ вектор, что противоречит лемме 22.2. Таким образом, система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ является базисом пространства V . Следовательно, любой вектор из V является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Поскольку эти векторы лежат в M , а M — подпространство в V , это означает, что любой вектор из V лежит в M , т. е. $V \subseteq M$. Обратное включение выполнено по условию, и потому $M = V$. Итак, если $\dim M = \dim V$, то $M = V$. Обратное утверждение очевидно. □

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов

Укажем способ нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов.

Алгоритм 23.1

Предположим, что мы знаем координаты данных векторов в некотором фиксированном базисе пространства. Запишем эти координаты в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.

Обоснование этого алгоритма будет дано в § 27.

23.2. Сумма и пересечение подпространств

Поскольку подпространства векторного пространства V являются его подмножествами, к ним можно применять все теоретико-множественные операции. Но важной для линейной алгебры является только одна из них — операция пересечения подпространств. Как и пересечение любых множеств, пересечение подпространств обозначается символом \cap . Введем еще одну важную операцию над подпространствами.

Определение

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. *Суммой подпространств* M_1 и M_2 называется множество всех векторов из V , являющихся суммой некоторого вектора из M_1 и некоторого вектора из M_2 . Сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 + M_2$.

Замечание 23.3

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V , то $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ также являются подпространствами в V .

Доказательство. В силу замечания 23.1 каждое из подпространств M_1 и M_2 содержит нулевой вектор. Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in M_1 + M_2$ и $\mathbf{0} \in M_1 \cap M_2$.

В частности, множества $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ — непустые.

Далее, пусть $x, y \in M_1 + M_2$ и t — произвольный скаляр. Тогда $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$ для некоторых $x_1, y_1 \in M_1$ и $x_2, y_2 \in M_2$. Учитывая, что M_1 и M_2 — подпространства, получаем, что

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in M_1 + M_2, \\tx &= t(x_1 + x_2) = tx_1 + tx_2 \in M_1 + M_2.\end{aligned}$$

Следовательно, $M_1 + M_2$ — подпространство в V . Далее, пусть $x, y \in M_1 \cap M_2$ и t — произвольный скаляр. Тогда $x, y \in M_1$ и $x, y \in M_2$. Поскольку M_1 и M_2 — подпространства, имеем $x + y \in M_1$, $x + y \in M_2$, $tx \in M_1$ и $tx \in M_2$. Следовательно, $x + y \in M_1 \cap M_2$ и $tx \in M_1 \cap M_2$, и потому $M_1 \cap M_2$ — подпространство в V . □

Замечание 23.4

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V , то подпространство $M_1 + M_2$ содержит M_1 и M_2 и является наименьшим подпространством в V , обладающим указанным свойством.

Доказательство. Если $x \in M_1$, то $x \in M_1 + M_2$, поскольку $x = x + \mathbf{0}$ и $\mathbf{0} \in M_2$. Следовательно, $M_1 \subseteq M_1 + M_2$. Аналогично проверяется, что $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Пусть теперь M — подпространство в V , содержащее M_1 и M_2 . Предположим, что $x \in M_1 + M_2$. Тогда $x = x_1 + x_2$ для некоторых $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$. Следовательно, $x_1 \in M$ и $x_2 \in M$, откуда $x = x_1 + x_2 \in M$. Таким образом, $M_1 + M_2 \subseteq M$. □

В §1 отмечалось, что операцию пересечения множеств можно применять к любому (в том числе бесконечному) числу множеств. Соответственно, можно говорить о пересечении любого (в том числе бесконечного) набора подпространств данного векторного пространства. Операцию суммы подпространств также можно применять не к двум подпространствам, а к их большему, но только конечному числу. Если M_1, M_2, \dots, M_k — подпространства векторного пространства V и $k > 2$, то, по индукции, положим

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k = (M_1 + M_2 + \dots + M_{k-1}) + M_k.$$

При этом скобки в левой части равенства можно не ставить, поскольку операция суммы двух подпространств, очевидно, ассоциативна.

Размерность суммы подпространств (1)

Первым из двух основных результатов данного параграфа является

Теорема 23.1

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств M_1 и M_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

Доказательство. Из предложения 23.1 вытекает, что $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_1$ и $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_2$. Положим

$$\dim(M_1 \cap M_2) = k, \quad \dim M_1 = k + \ell \quad \text{и} \quad \dim M_2 = k + m.$$

Если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\dim M_1 = \dim(M_1 \cap M_2) = 0$, $M_1 + M_2 = M_2$ и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Аналогично разбирается случай, когда $M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Итак, далее можно считать, что пространства M_1 и M_2 — ненулевые, и, в частности, каждое из них имеет базис. Будем также считать, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в противном случае следует во всех дальнейших рассуждениях заменить базис пространства $M_1 \cap M_2$ на пустой набор векторов; сами рассуждения при этом только упростятся). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства $M_1 \cap M_2$.

Размерность суммы подпространств (2)

В силу теоремы 22.3 этот набор векторов можно дополнить как до базиса M_1 , так и до базиса M_2 . Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ — базис M_1 , а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ — базис M_2 . Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m \quad (1)$$

является базисом пространства $M_1 + M_2$. Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Ясно, что вектор \mathbf{x}_1 является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$, а вектор \mathbf{x}_2 — линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$. Следовательно, вектор $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ является линейной комбинацией векторов (1). Таким образом, набор векторов (1) является системой образующих пространства $M_1 + M_2$. В силу леммы 22.1 остается доказать, что этот набор векторов линейно независим. В самом деле, предположим, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k + s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell \mathbf{b}_\ell + r_1 \mathbf{c}_1 + r_2 \mathbf{c}_2 + \dots + r_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \dots, t_k, s_1, s_2, \dots, s_\ell, r_1, r_2, \dots, r_m$. Требуется доказать, что все эти скаляры равны 0.

Размерность суммы подпространств (3)

Положим $y = s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell \mathbf{b}_\ell$. Очевидно, что $y \in M_1$. С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$y = -t_1 \mathbf{a}_1 - t_2 \mathbf{a}_2 - \dots - t_k \mathbf{a}_k - r_1 \mathbf{c}_1 - r_2 \mathbf{c}_2 - \dots - r_m \mathbf{c}_m \in M_2.$$

Следовательно, $y \in M_1 \cap M_2$. Но тогда вектор y есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Таким образом, существуют скаляры q_1, q_2, \dots, q_k такие, что $y = s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell \mathbf{b}_\ell = q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + \dots + q_k \mathbf{a}_k$. Следовательно,

$$q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + \dots + q_k \mathbf{a}_k - s_1 \mathbf{b}_1 - s_2 \mathbf{b}_2 - \dots - s_\ell \mathbf{b}_\ell = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ образуют базис пространства M_1 , они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (3), тривиальна. В частности, $s_1 = s_2 = \dots = s_\ell = 0$. Следовательно, равенство (2) принимает вид

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k + r_1 \mathbf{c}_1 + r_2 \mathbf{c}_2 + \dots + r_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0}.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ образуют базис пространства M_2 (и, в частности, линейно независимы), мы получаем, что $t_1 = t_2 = \dots = t_k = r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (2) равны 0, что и требовалось доказать.