Тема III. Квадратичные формы

§ 2. Критерий Сильвестра

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая положительна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *положительно определенной*.

Определение

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая положительна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *положительно определенной*. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая отрицательна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *отрицательно определенной*.

Определение

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая положительна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *положительно определенной*. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая отрицательна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *отрицательно определенной*.

Из закона инерции следует, что форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена, если и только если она приводится к каноническому виду

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$.

Определение

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая положительна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *положительно определенной*. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая отрицательна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *отрицательно определенной*.

Из закона инерции следует, что форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена, если и только если она приводится к каноническому виду

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$. Аналогично, форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда она приводится к каноническому виду $(*)$ с $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < 0$.

Определение

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая положительна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *положительно определенной*. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая отрицательна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *отрицательно определенной*.

Из закона инерции следует, что форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена, если и только если она приводится к каноническому виду

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \tag{$*$}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$. Аналогично, форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда она приводится к каноническому виду $(*)$ с $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < 0$. Поэтому положительную/отрицательную определенность можно распознать, приведя форму к каноническому виду.

Определение

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая положительна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *положительно определенной*. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая отрицательна при любом ненулевом наборе значений переменных, называется *отрицательно определенной*.

Из закона инерции следует, что форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена, если и только если она приводится к каноническому виду

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$. Аналогично, форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда она приводится к каноническому виду $(*)$ с $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < 0$. Поэтому положительную/отрицательную определенность можно распознать, приведя форму к каноническому виду.

Однако иногда удобны условия положительной/отрицательной определенности, выраженные в терминах матрицы исходной формы $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Угловые миноры и унитреугольные матрицы

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями.

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями. Нам понадобятся два новых определения.

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями. Нам понадобятся два новых определения.

Определение

Верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица называется *верхней (нижней) унитреугольной*, если элементы ее главной диагонали равны 1.

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями. Нам понадобятся два новых определения.

Определение

Верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица называется *верхней (нижней) унитреугольной*, если элементы ее главной диагонали равны 1.

Типичная верхняя унитреугольная матрица: $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Угловые миноры и унитреугольные матрицы

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями. Нам понадобятся два новых определения.

Определение

Верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица называется *верхней (нижней) унитреугольной*, если элементы ее главной диагонали равны 1.

Типичная верхняя унитреугольная матрица: $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что определитель любой унитреугольной матрицы равен 1.

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями. Нам понадобятся два новых определения.

Определение

Верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица называется *верхней (нижней) унитреугольной*, если элементы ее главной диагонали равны 1.

Типичная верхняя унитреугольная матрица: $$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что определитель любой унитреугольной матрицы равен 1.

Определение

Миноры $n \times n$-матрицы, расположенные в ее первых k строках и первых k столбцах ($k = 1, 2, \dots, n$) называются *угловыми минорами*.

Мы выведем критерий положительной определенности формы из одного полезного разложения квадратных матриц над произвольными полями. Нам понадобятся два новых определения.

Определение

Верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица называется *верхней (нижней) унитреугольной*, если элементы ее главной диагонали равны 1.

Типичная верхняя унитреугольная матрица: $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что определитель любой унитреугольной матрицы равен 1.

Определение

Миноры $n \times n$-матрицы, расположенные в ее первых k строках и первых k столбцах ($k = 1, 2, \dots, n$) называются *угловыми минорами*.

k-й угловой минор обозначим Δ_k. Если $A = (a_{ij})$, то $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_n = |A|$.

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ *над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от* 0, *однозначно представима в виде* $A = LDU$, *где матрица* L *нижняя унитреугольная, матрица* D *диагональная, а матрица* U *верхняя унитреугольная.*

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от 0, однозначно представима в виде $A = LDU$, где матрица L нижняя унитреугольная, матрица D диагональная, а матрица U верхняя унитреугольная.

Доказательство. Обозначим через A_k матрицу на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A, т.е. ту матрицу, определителем которой служит угловой минор Δ_k.

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от 0, однозначно представима в виде $A = LDU$, где матрица L нижняя унитреугольная, матрица D диагональная, а матрица U верхняя унитреугольная.

Доказательство. Обозначим через A_k матрицу на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A, т.е. ту матрицу, определителем которой служит угловой минор Δ_k. Индукцией по k докажем, что она однозначно представима в виде $A_k = L_k D_k U_k$, где L_k – нижняя унитреугольная, D_k – диагональная, а U_k – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрицы.

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от 0, однозначно представима в виде $A = LDU$, где матрица L нижняя унитреугольная, матрица D диагональная, а матрица U верхняя унитреугольная.

Доказательство. Обозначим через A_k матрицу на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A, т.е. ту матрицу, определителем которой служит угловой минор Δ_k. Индукцией по k докажем, что она однозначно представима в виде $A_k = L_k D_k U_k$, где L_k – нижняя унитреугольная, D_k – диагональная, а U_k – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрицы. При k, равном размеру A, получим утверждение теоремы.

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от 0, однозначно представима в виде $A = LDU$, где матрица L нижняя унитреугольная, матрица D диагональная, а матрица U верхняя унитреугольная.

Доказательство. Обозначим через A_k матрицу на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A, т.е. ту матрицу, определителем которой служит угловой минор Δ_k. Индукцией по k докажем, что она однозначно представима в виде $A_k = L_k D_k U_k$, где L_k – нижняя унитреугольная, D_k – диагональная, а U_k – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрицы. При k, равном размеру A, получим утверждение теоремы.

База индукции. При $k = 1$ имеем $A_1 = (a_{11})$, и единственно возможное LDU-разложение для A_1 есть $(a_{11}) = (1) \cdot (a_{11}) \cdot (1)$.

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от 0, однозначно представима в виде $A = LDU$, где матрица L нижняя унитреугольная, матрица D диагональная, а матрица U верхняя унитреугольная.

Доказательство. Обозначим через A_k матрицу на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A, т.е. ту матрицу, определителем которой служит угловой минор Δ_k. Индукцией по k докажем, что она однозначно представима в виде $A_k = L_k D_k U_k$, где L_k – нижняя унитреугольная, D_k – диагональная, а U_k – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрицы. При k, равном размеру A, получим утверждение теоремы.

База индукции. При $k = 1$ имеем $A_1 = (a_{11})$, и единственно возможное LDU-разложение для A_1 есть $(a_{11}) = (1) \cdot (a_{11}) \cdot (1)$.

Шаг индукции. Допустим, что доказываемое утверждение верно для матрицы A_k, и проверим, что тогда оно верно и для матрицы A_{k+1}.

Теорема (LDU-разложение, Тадеуш Банахевич, 1938)

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ над произвольным полем, все угловые миноры которой отличны от 0, однозначно представима в виде $A = LDU$, где матрица L нижняя унитреугольная, матрица D диагональная, а матрица U верхняя унитреугольная.

Доказательство. Обозначим через A_k матрицу на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A, т.е. ту матрицу, определителем которой служит угловой минор Δ_k. Индукцией по k докажем, что она однозначно представима в виде $A_k = L_k D_k U_k$, где L_k – нижняя унитреугольная, D_k – диагональная, а U_k – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрицы. При k, равном размеру A, получим утверждение теоремы.

База индукции. При $k = 1$ имеем $A_1 = (a_{11})$, и единственно возможное LDU-разложение для A_1 есть $(a_{11}) = (1) \cdot (a_{11}) \cdot (1)$.

Шаг индукции. Допустим, что доказываемое утверждение верно для матрицы A_k, и проверим, что тогда оно верно и для матрицы A_{k+1}.

Матрицу A_{k+1} запишем в виде $A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix}$,

где $\mathbf{u} = (a_{k+1\,1}, \dots, a_{k+1\,k})$, а $\mathbf{v} = (a_{1\,k+1}, \dots, a_{k\,k+1})$.

Будем искать представление $A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1) \times (k+1)$-матрицы.

LDU-разложение (2)

Будем искать представление $A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1) \times (k+1)$-матрицы. Разобьём каждый множитель на четыре блока:

- $L_{k+1} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$, где L – нижняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{x}$ – строка длины k, O_k^T – нулевой столбец высоты k;

- $U_{k+1} = \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$, где U – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{y}^T$ – столбец высоты k, O_k – нулевая строка длины k;

- $D_{k+1} = \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}$, где D – диагональная $k \times k$-матрица.

Будем искать представление $A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1)\times(k+1)$-матрицы. Разобьём каждый множитель на четыре блока:

- $L_{k+1} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$, где L – нижняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{x}$ – строка длины k, O_k^T – нулевой столбец высоты k;

- $U_{k+1} = \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$, где U – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{y}^T$ – столбец высоты k, O_k – нулевая строка длины k;

- $D_{k+1} = \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}$, где D – диагональная $k \times k$-матрица.

Перемножая блочные матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$$

Будем искать представление $A_{k+1}=L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1)\times(k+1)$-матрицы. Разобьём каждый множитель на четыре блока:

- $L_{k+1}=\begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$, где L – нижняя унитреугольная $k\times k$-матрица,

$\mathbf{x}$ – строка длины k, O_k^T – нулевой столбец высоты k;

- $U_{k+1}=\begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$, где U – верхняя унитреугольная $k\times k$-матрица,

$\mathbf{y}^T$ – столбец высоты k, O_k – нулевая строка длины k;

- $D_{k+1}=\begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}$, где D – диагональная $k\times k$-матрица.

Перемножая блочные матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} LDU & LD\mathbf{y}^T \\ \mathbf{x}DU & \mathbf{x}D\mathbf{y}^T+d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Будем искать представление $A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1) \times (k+1)$-матрицы. Разобьём каждый множитель на четыре блока:

- $L_{k+1} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$, где L – нижняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{x}$ – строка длины k, O_k^T – нулевой столбец высоты k;

- $U_{k+1} = \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$, где U – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{y}^T$ – столбец высоты k, O_k – нулевая строка длины k;

- $D_{k+1} = \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}$, где D – диагональная $k \times k$-матрица.

Перемножая блочные матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LDU & LD\mathbf{y}^T \\ \mathbf{x}DU & \mathbf{x}D\mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая северо-западные блоки, заключаем, что $A_k = LDU$.

Будем искать представление $A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1)\times(k+1)$-матрицы. Разобьём каждый множитель на четыре блока:

- $L_{k+1} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$, где L – нижняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{x}$ – строка длины k, O_k^T – нулевой столбец высоты k;

- $U_{k+1} = \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$, где U – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{y}^T$ – столбец высоты k, O_k – нулевая строка длины k;

- $D_{k+1} = \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}$, где D – диагональная $k \times k$-матрица.

Перемножая блочные матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LDU & LD\mathbf{y}^T \\ \mathbf{x}DU & \mathbf{x}D\mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая северо-западные блоки, заключаем, что $A_k = LDU$.
По предположению индукции матрица A_k **однозначно** представима как $A_k = L_kD_kU_k$, где L_k и U_k – нижняя и верхняя унитреугольные, а D_k – диагональная $k \times k$-матрицы.

LDU-разложение (2)

Будем искать представление $A_{k+1} = L_{k+1}D_{k+1}U_{k+1}$, где L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная $(k+1)\times(k+1)$-матрицы. Разобьём каждый множитель на четыре блока:

- $L_{k+1} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$, где L – нижняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{x}$ – строка длины k, O_k^T – нулевой столбец высоты k;

- $U_{k+1} = \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix}$, где U – верхняя унитреугольная $k \times k$-матрица,

$\mathbf{y}^T$ – столбец высоты k, O_k – нулевая строка длины k;

- $D_{k+1} = \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix}$, где D – диагональная $k \times k$-матрица.

Перемножая блочные матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O_k^T \\ \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_k^T \\ O_k & d_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \mathbf{y}^T \\ O_k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LDU & LD\mathbf{y}^T \\ \mathbf{x}DU & \mathbf{x}D\mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая северо-западные блоки, заключаем, что $A_k = LDU$.
По предположению индукции матрица A_k **однозначно** представима как $A_k = L_kD_kU_k$, где L_k и U_k – нижняя и верхняя унитреугольные, а D_k – диагональная $k \times k$-матрицы. Отсюда $L = L_k$, $U = U_k$ и $D = D_k$.

Итак,

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравняв северо-восточные блоки, получим равенство $L_k D_k \mathbf{y}^T = \mathbf{v}^T$, которое дает систему линейных уравнений для координат столбца $\mathbf{y}^T$.

Итак,

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравняв северо-восточные блоки, получим равенство $L_k D_k \mathbf{y}^T = \mathbf{v}^T$, которое дает систему линейных уравнений для координат столбца $\mathbf{y}^T$. Определитель этой системы $\det L_k D_k = \det L_k D_k \det U_k$ (так как $\det U_k = 1$) $= \det L_k D_k U_k = \det A_k = \Delta_k \neq 0$ по условию теоремы.

Итак,
$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравняв северо-восточные блоки, получим равенство $L_k D_k \mathbf{y}^T = \mathbf{v}^T$, которое дает систему линейных уравнений для координат столбца $\mathbf{y}^T$. Определитель этой системы $\det L_k D_k = \det L_k D_k \det U_k$ (так как $\det U_k = 1$) $= \det L_k D_k U_k = \det A_k = \Delta_k \neq 0$ по условию теоремы. Значит, система крамеровская, и столбец $\mathbf{y}^T$ существует и единствен.

Итак,
$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$
Приравняв северо-восточные блоки, получим равенство $L_k D_k \mathbf{y}^T = \mathbf{v}^T$, которое дает систему линейных уравнений для координат столбца $\mathbf{y}^T$. Определитель этой системы $\det L_k D_k = \det L_k D_k \det U_k$ (так как $\det U_k = 1$) $= \det L_k D_k U_k = \det A_k = \Delta_k \neq 0$ по условию теоремы. Значит, система крамеровская, и столбец $\mathbf{y}^T$ существует и единствен. Аналогично, из равенства $\mathbf{x} D_k U_k = \mathbf{u}$ однозначно определяется строка $\mathbf{x}$.

Итак,

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравняв северо-восточные блоки, получим равенство $L_k D_k \mathbf{y}^T = \mathbf{v}^T$, которое дает систему линейных уравнений для координат столбца $\mathbf{y}^T$. Определитель этой системы $\det L_k D_k = \det L_k D_k \det U_k$ (так как $\det U_k = 1$) $= \det L_k D_k U_k = \det A_k = \Delta_k \neq 0$ по условию теоремы. Значит, система крамеровская, и столбец $\mathbf{y}^T$ существует и единствен. Аналогично, из равенства $\mathbf{x} D_k U_k = \mathbf{u}$ однозначно определяется строка $\mathbf{x}$. Наконец, зная $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^T$, из равенства $\mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} = a_{k+1\,k+1}$ однозначно определяем элемент d_{k+1}.

Итак,

$$\begin{pmatrix} A_k & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{u} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k \mathbf{y}^T \\ \mathbf{x} D_k U_k & \mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Приравняв северо-восточные блоки, получим равенство $L_k D_k \mathbf{y}^T = \mathbf{v}^T$, которое дает систему линейных уравнений для координат столбца $\mathbf{y}^T$. Определитель этой системы $\det L_k D_k = \det L_k D_k \det U_k$ (так как $\det U_k = 1$) $= \det L_k D_k U_k = \det A_k = \Delta_k \neq 0$ по условию теоремы. Значит, система крамеровская, и столбец $\mathbf{y}^T$ существует и единствен. Аналогично, из равенства $\mathbf{x} D_k U_k = \mathbf{u}$ однозначно определяется строка $\mathbf{x}$. Наконец, зная $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^T$, из равенства $\mathbf{x} D_k \mathbf{y}^T + d_{k+1} = a_{k+1\,k+1}$ однозначно определяем элемент d_{k+1}. Итак, $(k+1) \times (k+1)$-матрицы L_{k+1}, D_{k+1} и U_{k+1}, такие, что L_{k+1} – нижняя унитреугольная, D_{k+1} – диагональная, а U_{k+1} – верхняя унитреугольная и $A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}$, существуют и однозначно определяются по матрице A_{k+1}. $\square$

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU-*разложение, то $L = U^T$.*

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU-*разложение, то $L = U^T$.*

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$).

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU*-разложение, то $L = U^T$.*

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$). Матрица U^T нижняя унитреугольная, а матрица L^T верхняя унитреугольная, т.е. равенство $A = U^T DL^T$ есть LDU-разложение матрицы A.

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU*-разложение, то $L = U^T$.*

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$). Матрица U^T нижняя унитреугольная, а матрица L^T верхняя унитреугольная, т.е. равенство $A = U^T DL^T$ есть LDU-разложение матрицы A. Но LDU-разложение единственно, откуда $L = U^T$. □

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU*-разложение, то $L = U^T$.*

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$). Матрица U^T нижняя унитреугольная, а матрица L^T верхняя унитреугольная, т.е. равенство $A = U^T DL^T$ есть LDU-разложение матрицы A. Но LDU-разложение единственно, откуда $L = U^T$. $\square$

Комментарии. Доказательство теоремы о LDU-разложении конструктивно и позволяет строить такие разложения.

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU-разложение, то $L = U^T$.

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$). Матрица U^T нижняя унитреугольная, а матрица L^T верхняя унитреугольная, т.е. равенство $A = U^T DL^T$ есть LDU-разложение матрицы A. Но LDU-разложение единственно, откуда $L = U^T$. □

Комментарии. Доказательство теоремы о LDU-разложении конструктивно и позволяет строить такие разложения. В действительности, можно проверить, что для симметрической матрицы условие, что все угловые миноры отличны от 0, означает в точности то, что при приведении квадратичной формы с этой матрицей к каноническому виду методом Лагранжа всегда встретится только первый случай (и потому приведение сводится к последовательному выделению полных квадратов).

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU*-разложение, то $L = U^T$.*

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$). Матрица U^T нижняя унитреугольная, а матрица L^T верхняя унитреугольная, т.е. равенство $A = U^T DL^T$ есть LDU-разложение матрицы A. Но LDU-разложение единственно, откуда $L = U^T$. $\square$

Комментарии. Доказательство теоремы о LDU-разложении конструктивно и позволяет строить такие разложения. В действительности, можно проверить, что для симметрической матрицы условие, что все угловые миноры отличны от 0, означает в точности то, что при приведении квадратичной формы с этой матрицей к каноническому виду методом Лагранжа всегда встретится только первый случай (и потому приведение сводится к последовательному выделению полных квадратов).

Метод Лагранжа в этой ситуации дает LDU-разложение.

Следствие (LDU-разложение симметрической матрицы)

Если A – симметрическая матрица, все угловые миноры которой отличны от 0, и $A = LDU$ – ее LDU-разложение, то $L = U^T$.

Доказательство. Транспонируя обе части равенства $A = LDU$, получим $A = U^T DL^T$ (поскольку $A = A^T$ и $D = D^T$). Матрица U^T нижняя унитреугольная, а матрица L^T верхняя унитреугольная, т.е. равенство $A = U^T DL^T$ есть LDU-разложение матрицы A. Но LDU-разложение единственно, откуда $L = U^T$. □

Комментарии. Доказательство теоремы о LDU-разложении конструктивно и позволяет строить такие разложения. В действительности, можно проверить, что для симметрической матрицы условие, что все угловые миноры отличны от 0, означает в точности то, что при приведении квадратичной формы с этой матрицей к каноническому виду методом Лагранжа всегда встретится только первый случай (и потому приведение сводится к последовательному выделению полных квадратов).

Метод Лагранжа в этой ситуации дает LDU-разложение. В примере на метод Лагранжа из прошлой лекции встретилась именно такая ситуация.

Мы привели форму

$$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

к каноническому виду $4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2$, и результирующая замена выглядела так:

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 \\ y_2 &= & x_2 & +x_3 & +x_4 \\ y_3 &= & & x_3 & +2x_4 \\ y_4 &= & & & x_4 \end{cases}$$

Мы привели форму

$$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

к каноническому виду $4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2$, и результирующая замена выглядела так:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = x_3 + 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$$

Видно, что матрица этой замены верхняя унитреугольная и по существу мы построили LDU-разложение матрицы формы f:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ *положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.*

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ положительно определена.

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$.

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$. Матрица формы $(*)$ диагональна и ее определитель равен $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n > 0$.

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$. Матрица формы $(*)$ диагональна и ее определитель равен $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n > 0$. На прошлой лекции мы отмечали, что если форма g получена из формы q невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм q и g либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0.

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$. Матрица формы $(*)$ диагональна и ее определитель равен $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n > 0$. На прошлой лекции мы отмечали, что если форма g получена из формы q невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм q и g либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0. В нашем случае определитель матрицы формы $(*)$ положителен, откуда и определитель $|A| = \Delta_n$ положителен.

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2, \tag{$*$}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$. Матрица формы $(*)$ диагональна и ее определитель равен $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n > 0$. На прошлой лекции мы отмечали, что если форма g получена из формы q невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм q и g либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0. В нашем случае определитель матрицы формы $(*)$ положителен, откуда и определитель $|A| = \Delta_n$ положителен.

Осталось заметить, что если форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена, то такова и форма от k переменных $q(x_1, x_2, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$.

Теорема (Сильвестр, 1852)

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Необходимость. Пусть форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$. Матрица формы $(*)$ диагональна и ее определитель равен $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n > 0$. На прошлой лекции мы отмечали, что если форма g получена из формы q невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм q и g либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0. В нашем случае определитель матрицы формы $(*)$ положителен, откуда и определитель $|A| = \Delta_n$ положителен.

Осталось заметить, что если форма $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена, то такова и форма от k переменных $q(x_1, x_2, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$.

Матрица этой формы есть A_k, откуда $|A_k| = \Delta_k > 0$.

Критерий Сильвестра (2)

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$.

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX$

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX = Y^T DY$, где $Y := UX$.

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX = Y^T DY$, где $Y := UX$. Итак, замена $Y = UX$ приводит форму $q = X^T AX$ к каноническому виду

$$\delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \dots + \delta_n y_n^2.$$

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX = Y^T DY$, где $Y := UX$. Итак, замена $Y = UX$ приводит форму $q = X^T AX$ к каноническому виду

$$\delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \dots + \delta_n y_n^2.$$

Поскольку $A_k = U_k^T D_k U_k$ и определители унитреугольных матриц равны 1, имеем $\Delta_k = |A_k| = |D_k| = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k$.

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX = Y^T DY$, где $Y := UX$. Итак, замена $Y = UX$ приводит форму $q = X^T AX$ к каноническому виду

$$\delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \cdots + \delta_n y_n^2.$$

Поскольку $A_k = U_k^T D_k U_k$ и определители унитреугольных матриц равны 1, имеем $\Delta_k = |A_k| = |D_k| = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k$.

Отсюда $\delta_1 = \Delta_1 > 0$ и $\delta_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0$ для всех $i = 2, \ldots, n$.

Достаточность. Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы U и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX = Y^T DY$, где $Y := UX$. Итак, замена $Y = UX$ приводит форму $q = X^T AX$ к каноническому виду

$$\delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \cdots + \delta_n y_n^2.$$

Поскольку $A_k = U_k^T D_k U_k$ и определители унитреугольных матриц равны 1, имеем $\Delta_k = |A_k| = |D_k| = \delta_1\delta_2\cdots\delta_k$.

Отсюда $\delta_1 = \Delta_1 > 0$ и $\delta_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0$ для всех $i = 2, \ldots, n$. Поэтому форма q положительно определена. □

Отрицательно определенные формы

Понятно, что форма q отрицательно определена тогда и только тогда, когда форма $-q$ положительно определена.

Понятно, что форма q отрицательно определена тогда и только тогда, когда форма $-q$ положительно определена. Поэтому из доказательства критерия Сильвестра немедленно следует критерий отрицательной определенности:

Следствие

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ *отрицательно определена, если и только если знаки угловых миноров ее матрицы чередуются, причем* $\Delta_1 < 0$.

Отрицательно определенные формы

Понятно, что форма q отрицательно определена тогда и только тогда, когда форма $-q$ положительно определена. Поэтому из доказательства критерия Сильвестра немедленно следует критерий отрицательной определенности:

Следствие

Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ отрицательно определена, если и только если знаки угловых миноров ее матрицы чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.

Упражнение. Докажите *критерий Якоби*: *квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена, если и только если у характеристического многочлена ее матрицы все коэффициенты ненулевые и их знаки чередуются.*