# Тема II. Линейные операторы

# § 6. Изометрические операторы. Самосопряженные операторы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *изометрическим*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \ \mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *изометрическим*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1\ \mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$.

Ясно, что изометрический оператор сохраняет длины векторов, т.е. является *движением* в смысле элементарной геометрии.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *изометрическим*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \ \mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$.

Ясно, что изометрический оператор сохраняет длины векторов, т.е. является *движением* в смысле элементарной геометрии. Оказывается, верно и обратное:

**Теорема (о движениях)**

*Если линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ сохраняет длины векторов, он является изометрическим.*

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *изометрическим*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ $\mathbf{xy} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$.

Ясно, что изометрический оператор сохраняет длины векторов, т.е. является *движением* в смысле элементарной геометрии. Оказывается, верно и обратное:

**Теорема (о движениях)**

*Если линейный оператор $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ сохраняет длины векторов, он является изометрическим.*

Благодаря теореме легко приводить примеры изометрических операторов – таковыми будут всевозможные повороты и симметрии.

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$.

# Изометрические операторы и движения (2)

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$.

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{y}.$$

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{xx} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$\mathbf{xx} + \mathbf{xy} + \mathbf{yx} + \mathbf{yy} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{y}.$$

Отсюда

$$\mathbf{xy} + \mathbf{yx} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{1}$$

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{y}.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Если пространства $V_1$ и $V_2$ евклидовы, то из (1) сразу следует $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$.

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x}+\mathbf{x}\mathbf{y}+\mathbf{y}\mathbf{x}+\mathbf{y}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}+\mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}+\mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}+\mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{y}.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}\mathbf{y}+\mathbf{y}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}+\mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Если пространства $V_1$ и $V_2$ евклидовы, то из (1) сразу следует $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$. Если пространства $V_1$ и $V_2$ унитарны, подставим вместо $\mathbf{x}$ вектор $i\mathbf{x}$:

$$i\mathbf{x}\mathbf{y} - i\mathbf{y}\mathbf{x} = i\mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} - i\mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}.$$

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{y}.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Если пространства $V_1$ и $V_2$ евклидовы, то из (1) сразу следует $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$. Если пространства $V_1$ и $V_2$ унитарны, подставим вместо $\mathbf{x}$ вектор $i\mathbf{x}$:

$$i\mathbf{x}\mathbf{y} - i\mathbf{y}\mathbf{x} = i\mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} - i\mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}.$$

Сократив на $i$, получим

$$\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} - \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{2}$$

# Изометрические операторы и движения (2)

*Доказательство.* Дано, что $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V_1$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора $\mathcal{U}$ заключаем, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{y}.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} + \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Если пространства $V_1$ и $V_2$ евклидовы, то из (1) сразу следует $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$. Если пространства $V_1$ и $V_2$ унитарны, подставим вместо $\mathbf{x}$ вектор $i\mathbf{x}$:

$$i\mathbf{x}\mathbf{y} - i\mathbf{y}\mathbf{x} = i\mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} - i\mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}.$$

Сократив на $i$, получим

$$\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} - \mathcal{U}\mathbf{y}\mathcal{U}\mathbf{x}. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2) получаем $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y}$. $\square$

# Изометрические операторы в конечномерных пространствах

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

# Изометрические операторы в конечномерных пространствах

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$.

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{xy} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве $V_1$.

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$.
Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве $V_1$.
*Вопрос:* Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на $V_2$?

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве $V_1$.
*Вопрос:* Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на $V_2$?

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ вытекает, что оператор $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$.

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве $V_1$.

*Вопрос:* Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на $V_2$?

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ вытекает, что оператор $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Поскольку $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^{-1}$ перестановочны, *каждый изометрический оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением нормален.*

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве $V_1$.
*Вопрос:* Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на $V_2$?

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ вытекает, что оператор $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Поскольку $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^{-1}$ перестановочны, *каждый изометрический оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением нормален.*

Изометрические операторы на евклидовом пространстве называются *ортогональными*, а изометрические операторы на унитарном пространстве называются *унитарными*.

Пусть $\mathcal{U}\colon V_1 \to V_2$ – изометрический оператор **конечномерных** пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для $\mathcal{U}$ существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*\colon V_2 \to V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}.$$

Отсюда $\mathbf{y} = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)\mathbf{y}$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве $V_1$.

*Вопрос:* Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на $V_2$?

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ вытекает, что оператор $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Поскольку $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^{-1}$ перестановочны, *каждый изометрический оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением нормален.*

Изометрические операторы на евклидовом пространстве называются *ортогональными*, а изометрические операторы на унитарном пространстве называются *унитарными*. Те же термины применяют к матрицам:

- матрица $A$ над $\mathbb{R}$ называется *ортогональной*, если $A^{-1} = A^T$;
- матрица $A$ над $\mathbb{C}$ называется *унитарной*, если $A^{-1} = A^*$.

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.*

# Свойства изометрических операторов

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

# Свойства изометрических операторов

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla 2.$ *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*

# Свойства изометрических операторов

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla 2.$ *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*
*Доказательство.* Прямое утверждение очевидно.

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla 2.$ *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*
*Доказательство.* Прямое утверждение очевидно.
Пусть $V$ – пространство со скалярным произведением размерности $n$ и оператор $\mathcal{U}\colon V \to V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (1) в $V$ система векторов $\mathcal{U}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{U}\mathbf{e}_n$ (2) также образует ортонормированный базис в $V$.

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla 2.$ *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*
*Доказательство.* Прямое утверждение очевидно.
Пусть $V$ – пространство со скалярным произведением размерности $n$ и оператор $\mathcal{U}\colon V \to V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (1) в $V$ система векторов $\mathcal{U}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{U}\mathbf{e}_n$ (2) также образует ортонормированный базис в $V$. Выразим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ через базис (1): $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla 2.$ *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*
*Доказательство.* Прямое утверждение очевидно.
Пусть $V$ – пространство со скалярным произведением размерности $n$ и оператор $\mathcal{U}\colon V \to V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (1) в $V$ система векторов $\mathcal{U}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{U}\mathbf{e}_n$ (2) также образует ортонормированный базис в $V$. Выразим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ через базис (1): $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. Применив $\mathcal{U}$, получим выражение вектора $\mathcal{U}\mathbf{x}$ через базис (2): $\mathcal{U}\mathbf{x} = x_1\mathcal{U}\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathcal{U}\mathbf{e}_n$.

$\nabla$1. *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla$2. *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*
*Доказательство.* Прямое утверждение очевидно.
Пусть $V$ – пространство со скалярным произведением размерности $n$ и оператор $\mathcal{U}\colon V \to V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (1) в $V$ система векторов $\mathcal{U}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{U}\mathbf{e}_n$ (2) также образует ортонормированный базис в $V$. Выразим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ через базис (1): $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Применив $\mathcal{U}$, получим выражение вектора $\mathcal{U}\mathbf{x}$ через базис (2): $\mathcal{U}\mathbf{x} = x_1\mathcal{U}\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathcal{U}\mathbf{e}_n$. Вычисляя $\mathbf{x}\mathbf{x}$ через координаты в базисе (1) и $\mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ через координаты в базисе (2), получим одно и то же выражение $x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n}$.

$\nabla 1.$ *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу.* Эта группа называется *унитарной* в случае унитарных пространств и *ортогональной* в случае евклидовых пространств.
В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (*группа движений*) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

$\nabla 2.$ *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратно, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*
*Доказательство.* Прямое утверждение очевидно.
Пусть $V$ – пространство со скалярным произведением размерности $n$ и оператор $\mathcal{U}\colon V \to V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (1) в $V$ система векторов $\mathcal{U}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{U}\mathbf{e}_n$ (2) также образует ортонормированный базис в $V$. Выразим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ через базис (1): $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Применив $\mathcal{U}$, получим выражение вектора $\mathcal{U}\mathbf{x}$ через базис (2): $\mathcal{U}\mathbf{x} = x_1\mathcal{U}\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathcal{U}\mathbf{e}_n$. Вычисляя $\mathbf{x}\mathbf{x}$ через координаты в базисе (1) и $\mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$ через координаты в базисе (2), получим одно и то же выражение $x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n}$. Итак, $\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$, т.е. $\mathcal{U}$ сохраняет длины. Поэтому $\mathcal{U}$ – изометрический оператор. $\square$

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3.$ *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$*.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$.

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3.$ *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x}$$

# Свойства изометрических операторов (2)

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x})$$

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Отсюда $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Отсюда $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.

Если $\mathcal{U}$ – ортогональный оператор, то его комплексификация – унитарный оператор с той же матрицей и теми же собственными значениями. $\square$

# Свойства изометрических операторов (2)

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Отсюда $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.
Если $\mathcal{U}$ – ортогональный оператор, то его комплексификация – унитарный оператор с той же матрицей и теми же собственными значениями. $\square$

Обратное утверждение к $\nabla 3$, вообще говоря, неверно. Например, у матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оба собственных значения равны 1, но $A$ не является ортогональной, так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^T$.

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* $1$.
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}\mathcal{U}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Отсюда $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.
Если $\mathcal{U}$ – ортогональный оператор, то его комплексификация – унитарный оператор с той же матрицей и теми же собственными значениями. $\square$

Обратное утверждение к $\nabla 3$, вообще говоря, неверно. Например, у матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оба собственных значения равны 1, но $A$ не является ортогональной, так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^T$.

Мы вскоре увидим, что для нормальных операторов $\nabla 3$ обратимо.

# Строение унитарного оператора

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 3$.

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ равна эрмитово сопряженной к $A$ матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна.

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ равна эрмитово сопряженной к $A$ матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Вычисляя произведение $AA^*$, получим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят произведения вида $\lambda\overline{\lambda}$, где $\lambda$ – диагональный элемент матрицы $A$.

# Строение унитарного оператора

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ равна эрмитово сопряженной к $A$ матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Вычисляя произведение $AA^*$, получим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят произведения вида $\lambda\overline{\lambda}$, где $\lambda$ – диагональный элемент матрицы $A$. Поскольку $|\lambda| = 1$, имеем $\lambda\overline{\lambda} = 1$, откуда $AA^* = E$.

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ равна эрмитово сопряженной к $A$ матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Вычисляя произведение $AA^*$, получим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят произведения вида $\lambda\overline{\lambda}$, где $\lambda$ – диагональный элемент матрицы $A$. Поскольку $|\lambda| = 1$, имеем $\lambda\overline{\lambda} = 1$, откуда $AA^* = E$. Итак, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, т.е. $\mathcal{A}$ – унитарный оператор. □

**Теорема (строение унитарного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве $V$ унитарен тогда и только тогда, когда в $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны $1$.*

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ равна эрмитово сопряженной к $A$ матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Вычисляя произведение $AA^*$, получим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят произведения вида $\lambda\overline{\lambda}$, где $\lambda$ – диагональный элемент матрицы $A$. Поскольку $|\lambda| = 1$, имеем $\lambda\overline{\lambda} = 1$, откуда $AA^* = E$. Итак, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, т.е. $\mathcal{A}$ – унитарный оператор. □

**Следствие**

*Если все собственные значения нормального оператора на унитарном пространстве по модулю равны $1$, то оператор унитарен.*

**Теорема (строение ортогонального оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом пространстве $V$ ортогонален тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида $\pm 1$, либо размера 2 и вида* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

**Теорема (строение ортогонального оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом пространстве $V$ ортогонален тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида $\pm 1$, либо размера 2 и вида* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

*Доказательство. Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с $\nabla 3$.

**Теорема (строение ортогонального оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом пространстве $V$ ортогонален тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида $\pm 1$, либо размера 2 и вида* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию.

**Теорема (строение ортогонального оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом пространстве $V$ ортогонален тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида $\pm 1$, либо размера 2 и вида* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

*Доказательство*. *Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы при умножении на транспонированный блок дает единичную матрицу (*проверьте!*).

**Теорема (строение ортогонального оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом пространстве $V$ ортогонален тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида $\pm 1$, либо размера 2 и вида* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

*Доказательство. Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность*. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы при умножении на транспонированный блок дает единичную матрицу (*проверьте!*). Значит, матрица оператора $\mathcal{A}$ ортогональна. □

**Теорема (строение ортогонального оператора)**

*Линейный оператор* $\mathcal{A}$ *на евклидовом пространстве* $V$ *ортогонален тогда и только тогда, когда в* $V$ *есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида* $\pm 1$*, либо размера 2 и вида* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

*Доказательство. Необходимость* получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с $\nabla 3$.
*Достаточность.* Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы при умножении на транспонированный блок дает единичную матрицу (*проверьте!*). Значит, матрица оператора $\mathcal{A}$ ортогональна. □

**Следствие**

*Если все собственные значения нормального оператора на евклидовом пространстве по модулю равны* $1$*, то оператор ортогонален.*

## Следствие (теорема Шаля)

*Любое движение трехмерного пространства есть комбинация параллельного переноса с одним из следующих движений:*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – *тождественное преобразование;*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – *симметрия относительно плоскости;*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – *симметрия относительно прямой;*

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – *симметрия относительно точки;*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – *поворот вокруг оси на угол* $\varphi$*;*

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – *композиция поворота вокруг оси на угол* $\varphi$ *и симметрии.*

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x}$$

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{x}$$

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathcal{A}\mathbf{x})$$

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathcal{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathcal{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Отсюда $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda$ – действительное число.

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

$\nabla 4.$ *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*
*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, $\lambda$ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий $\lambda$. Тогда

$$\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathcal{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

Отсюда $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda$ – действительное число. Если $\mathcal{U}$ – самосопряженный оператор на евклидовом пространстве, оператор, его комплексификация – самосопряженный оператор на унитарном пространстве с той же матрицей и теми же собственными значениями. $\square$

**Теорема (строение самосопряженного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.*

**Теорема (строение самосопряженного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.*

*Доказательство.* *Необходимость.* Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 4$.

**Теорема (строение самосопряженного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.*

*Доказательство*. *Необходимость.* Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 4$.
*Достаточность*. Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе диагональна и действительна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ тоже равна $A$.

**Теорема (строение самосопряженного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.*

*Доказательство. Необходимость.* Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 4$.
*Достаточность.* Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе диагональна и действительна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ тоже равна $A$. Значит, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. $\square$

**Теорема (строение самосопряженного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.*

*Доказательство. Необходимость.* Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 4$.
*Достаточность.* Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе диагональна и действительна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ тоже равна $A$. Значит, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. □

В качестве следствия отметим частичное обращение наблюдения $\nabla 4$:

**Следствие**

*Если все собственные значения нормального оператора действительны, то оператор самосопряжен.*

**Теорема (строение самосопряженного оператора)**

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $V$ со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в $V$ есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна и действительна.*

*Доказательство. Необходимость.* Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 4$.
*Достаточность.* Если матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе диагональна и действительна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ тоже равна $A$. Значит, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. □

В качестве следствия отметим частичное обращение наблюдения $\nabla 4$:

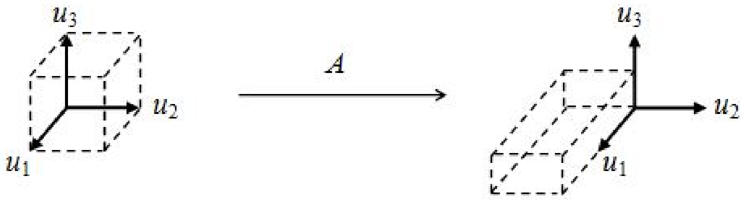
**Следствие**

*Если все собственные значения нормального оператора действительны, то оператор самосопряжен.*

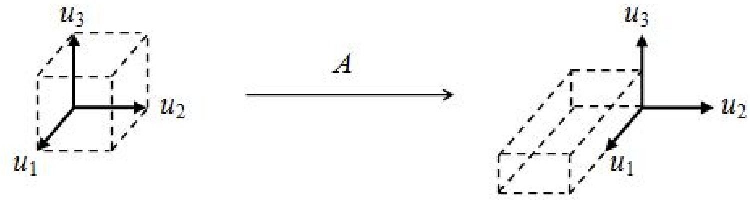
*Вопрос:* Верно ли обращение наблюдения $\nabla 4$ в общем случае?

Геометрический смысл самосопряженного оператора довольно прост – это растяжение или сжатие вдоль нескольких взаимно перпендикулярных осей, возможно в сочетании с отражением.

Геометрический смысл самосопряженного оператора довольно прост – это растяжение или сжатие вдоль нескольких взаимно перпендикулярных осей, возможно в сочетании с отражением.
На рисунке вектора ортонормированного базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ принадлежат собственным значениям 2, –1 и $\frac{1}{2}$.



Геометрический смысл самосопряженного оператора довольно прост – это растяжение или сжатие вдоль нескольких взаимно перпендикулярных осей, возможно в сочетании с отражением.
На рисунке вектора ортонормированного базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ принадлежат собственным значениям 2, –1 и $\frac{1}{2}$.




В физике (квантовой механике) самосопряженные операторы – это *наблюдаемые*, а их собственные значения – это те результаты, которые могут быть зарегистрированы при наблюдении.

# Матричные следствия

Переводя доказанные результаты на матричный язык и комбинируя их с теоремой о замене матрицы, получаем два важных следствия:

### Следствие об эрмитовых матрицах

*Квадратная матрица $A$ над полем $\mathbb{C}$ эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица $U$ и действительная диагональная матрица $D$, что $D = U^*AU$.*

Переводя доказанные результаты на матричный язык и комбинируя их с теоремой о замене матрицы, получаем два важных следствия:

**Следствие об эрмитовых матрицах**

*Квадратная матрица* $A$ *над полем* $\mathbb{C}$ *эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица* $U$ *и действительная диагональная матрица* $D$*, что* $D = U^*AU$.

**Следствие о симметрических матрицах**

*Квадратная матрица* $A$ *над полем* $\mathbb{R}$ *симметрична тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица* $U$ *и диагональная матрица* $D$ *такие, что* $D = U^TAU$. □