

Тема II. Линейные операторы

§ 5. Нормальные операторы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

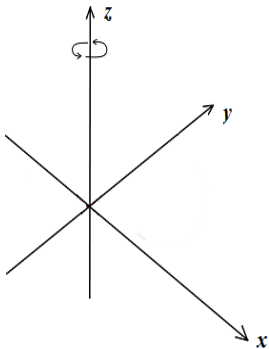
Определение

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно \mathcal{A}* или *\mathcal{A} -инвариантным*, если $\mathcal{A}x \in S$ для любого $x \in S$.

Определение

Пусть V – векторное пространство, $A: V \rightarrow V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно A* или *A -инвариантным*, если $Ax \in S$ для любого $x \in S$.

Примеры. 1) Если A – поворот обычного трехмерного пространства относительно оси Oz на какой-то угол θ , то плоскость Oxy и прямая Oz будут A -инвариантными подпространствами.



Определение

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно \mathcal{A}* или *\mathcal{A} -инвариантным*, если $\mathcal{A}x \in S$ для любого $x \in S$.

Примеры. 1) Если \mathcal{A} – поворот обычного трехмерного пространства относительно оси Oz на какой-то угол θ , то плоскость Oxy и прямая Oz будут \mathcal{A} -инвариантными подпространствами.

2) Если x – собственный вектор оператора \mathcal{A} , одномерное подпространство, натянутое на x , будет \mathcal{A} -инвариантным.

Определение

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор. Подпространство $S \subseteq V$ называется *инвариантным относительно \mathcal{A}* или *\mathcal{A} -инвариантным*, если $\mathcal{A}x \in S$ для любого $x \in S$.

- Примеры.* 1) Если \mathcal{A} – поворот обычного трехмерного пространства относительно оси Oz на какой-то угол θ , то плоскость Oxy и прямая Oz будут \mathcal{A} -инвариантными подпространствами.
- 2) Если x – собственный вектор оператора \mathcal{A} , одномерное подпространство, натянутое на x , будет \mathcal{A} -инвариантным.
- 3) Для любого линейного оператора \mathcal{A} его ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ и образ $\text{Im } \mathcal{A}$ будут \mathcal{A} -инвариантными подпространствами.

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор,
 $S \subset V$ – ненулевое подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} .

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор, $S \subset V$ – ненулевое подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} . Обозначим $n := \dim V$, $k := \dim S$; тогда $1 \leq k < n$. Выберем в S базис e_1, \dots, e_k и дополним его векторами e_{k+1}, \dots, e_n до базиса V .

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор, $S \subset V$ – ненулевое подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} . Обозначим $n := \dim V$, $k := \dim S$; тогда $1 \leq k < n$. Выберем в S базис e_1, \dots, e_k и дополним его векторами e_{k+1}, \dots, e_n до базиса V . Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в базисе e_1, \dots, e_n ?

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор, $S \subset V$ – ненулевое подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} . Обозначим $n := \dim V$, $k := \dim S$; тогда $1 \leq k < n$. Выберем в S базис e_1, \dots, e_k и дополним его векторами e_{k+1}, \dots, e_n до базиса V . Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в базисе e_1, \dots, e_n ? Поскольку подпространство S инвариантно, $\mathcal{A}e_i \in S$ при $i = 1, \dots, k$. Поэтому при $i = 1, \dots, k$ в разложении вектора $\mathcal{A}e_i$ по базису e_1, \dots, e_n ненулевые коэффициенты могут быть только у векторов e_1, \dots, e_k .

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор, $S \subset V$ – ненулевое подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} . Обозначим $n := \dim V$, $k := \dim S$; тогда $1 \leq k < n$. Выберем в S базис e_1, \dots, e_k и дополним его векторами e_{k+1}, \dots, e_n до базиса V .

Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в базисе e_1, \dots, e_n ?

Поскольку подпространство S инвариантно, $\mathcal{A}e_i \in S$ при $i = 1, \dots, k$.

Поэтому при $i = 1, \dots, k$ в разложении вектора $\mathcal{A}e_i$ по базису e_1, \dots, e_n ненулевые коэффициенты могут быть только у векторов e_1, \dots, e_k .

Это означает, что матрица A будет *верхней полураспавшейся*:

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$; у нее будет $k \times k$ -блок B , отвечающий векторам e_1, \dots, e_k , под которым будет идти нулевая $(n - k) \times k$ -матрица O .

Пусть V – векторное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – линейный оператор, $S \subset V$ – ненулевое подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} . Обозначим $n := \dim V$, $k := \dim S$; тогда $1 \leq k < n$. Выберем в S базис e_1, \dots, e_k и дополним его векторами e_{k+1}, \dots, e_n до базиса V .

Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в базисе e_1, \dots, e_n ?

Поскольку подпространство S инвариантно, $\mathcal{A}e_i \in S$ при $i = 1, \dots, k$.

Поэтому при $i = 1, \dots, k$ в разложении вектора $\mathcal{A}e_i$ по базису e_1, \dots, e_n ненулевые коэффициенты могут быть только у векторов e_1, \dots, e_k .

Это означает, что матрица A будет *верхней полураспавшейся*:

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$; у нее будет $k \times k$ -блок B , отвечающий векторам e_1, \dots, e_k ,

под которым будет идти нулевая $(n - k) \times k$ -матрица O .

Матрица B есть не что иное как матрица *ограничения оператора \mathcal{A}* на подпространство S в базисе e_1, \dots, e_k .

Допустим теперь, что пространство V является *прямой суммой* ненулевых \mathcal{A} -инвариантных подпространств S_1, \dots, S_t .

Допустим теперь, что пространство V является *прямой суммой* ненулевых \mathcal{A} -инвариантных подпространств S_1, \dots, S_t .

Выберем в каждом S_i базис; объединение этих базисов есть базис V .

Допустим теперь, что пространство V является *прямой суммой* ненулевых \mathcal{A} -инвариантных подпространств S_1, \dots, S_t .

Выберем в каждом S_i базис; объединение этих базисов есть базис V .

Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в устроенном так базисе?

Допустим теперь, что пространство V является *прямой суммой* ненулевых A -инвариантных подпространств S_1, \dots, S_t .

Выберем в каждом S_i базис; объединение этих базисов есть базис V .

Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в устроенном так базисе?

Определение

Квадратная матрица называется *блочно-диагональной*, если ее можно разбить на блоки A_{ij} так, что все блоки A_{ij} при $i \neq j$ нулевые матрицы, а все диагональные блоки A_{ii} – квадратные матрицы:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{tt} \end{pmatrix}.$$

Допустим теперь, что пространство V является *прямой суммой* ненулевых A -инвариантных подпространств S_1, \dots, S_t .

Выберем в каждом S_i базис; объединение этих базисов есть базис V .

Как выглядит матрица A оператора \mathcal{A} в устроенном так базисе?

Определение

Квадратная матрица называется *блочно-диагональной*, если ее можно разбить на блоки A_{ij} так, что все блоки A_{ij} при $i \neq j$ нулевые матрицы, а все диагональные блоки A_{ii} – квадратные матрицы:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{tt} \end{pmatrix}.$$

Понятно, что матрица A будет блочно-диагональной, причем i -й диагональный блок будет матрицей ограничения оператора \mathcal{A} на подпространство S_i в выбранном в этом подпространстве базисе.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V . Вспомним, что множество S^\perp всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и $V = S \oplus S^\perp$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V . Вспомним, что множество S^\perp всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и $V = S \oplus S^\perp$.

Лемма 1

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – его подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $A: V \rightarrow V$, то подпространство S^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора $A^: V \rightarrow V$.*

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V . Вспомним, что множество S^\perp всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и $V = S \oplus S^\perp$.

Лемма 1

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – его подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $A: V \rightarrow V$, то подпространство S^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора $A^: V \rightarrow V$.*

Доказательство. Возьмем произвольные вектора $x \in S$ и $y \in S^\perp$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V . Вспомним, что множество S^\perp всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и $V = S \oplus S^\perp$.

Лемма 1

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – его подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $A: V \rightarrow V$, то подпространство S^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора $A^: V \rightarrow V$.*

Доказательство. Возьмем произвольные вектора $x \in S$ и $y \in S^\perp$. Имеем

$$x A^* y = A x y \quad \text{свойство сопряженного оператора}$$

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V . Вспомним, что множество S^\perp всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и $V = S \oplus S^\perp$.

Лемма 1

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – его подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $A: V \rightarrow V$, то подпространство S^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора $A^: V \rightarrow V$.*

Доказательство. Возьмем произвольные вектора $x \in S$ и $y \in S^\perp$. Имеем

$$\begin{aligned} xA^*y &= Ax y \\ &= 0 \end{aligned}$$

свойство сопряженного оператора
так как $Ax \in S$, а $y \in S^\perp$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V . Вспомним, что множество S^\perp всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства само является подпространством и $V = S \oplus S^\perp$.

Лемма 1

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – его подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $A: V \rightarrow V$, то подпространство S^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора $A^: V \rightarrow V$.*

Доказательство. Возьмем произвольные вектора $x \in S$ и $y \in S^\perp$. Имеем

$$\begin{aligned} xA^*y &= Axу && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } Ax \in S, \text{ а } y \in S^\perp. \end{aligned}$$

Итак, вектор A^*y ортогонален произвольному вектору $x \in S$, откуда $A^*y \in S^\perp$. □

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$).

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$). Эти типы нормальных операторов будут рассмотрены позднее, а сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$). Эти типы нормальных операторов будут рассмотрены позднее, а сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

Лемма 2

Пусть x – собственный вектор нормального оператора \mathcal{A} , принадлежащий собственному значению λ . Тогда x является собственным вектором сопряженного оператора \mathcal{A}^ , принадлежащим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$). Эти типы нормальных операторов будут рассмотрены позднее, а сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

Лемма 2

Пусть x – собственный вектор нормального оператора \mathcal{A} , принадлежащий собственному значению λ . Тогда x является собственным вектором сопряженного оператора \mathcal{A}^ , принадлежащим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, где \mathcal{E} – тождественный оператор.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$). Эти типы нормальных операторов будут рассмотрены позднее, а сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

Лемма 2

Пусть x – собственный вектор нормального оператора \mathcal{A} , принадлежащий собственному значению λ . Тогда x является собственным вектором сопряженного оператора \mathcal{A}^ , принадлежащим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, где \mathcal{E} – тождественный оператор. Тогда $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}$ и из $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ следует, что

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}) = (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{B}^*\mathcal{B}.$$

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$). Эти типы нормальных операторов будут рассмотрены позднее, а сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

Лемма 2

Пусть x – собственный вектор нормального оператора \mathcal{A} , принадлежащий собственному значению λ . Тогда x является собственным вектором сопряженного оператора \mathcal{A}^ , принадлежащим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, где \mathcal{E} – тождественный оператор. Тогда $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}$ и из $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ следует, что

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}) = (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{B}^*\mathcal{B}.$$

Хотим доказать, что $\mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x$, т.е. что $(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})x = \mathcal{B}^*x = 0$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т.е. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Примерами нормальных операторов служат *самосопряженные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$) и *унитарные/ортогональные* операторы (когда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$). Эти типы нормальных операторов будут рассмотрены позднее, а сейчас займемся произвольными нормальными операторами.

Лемма 2

Пусть x – собственный вектор нормального оператора \mathcal{A} , принадлежащий собственному значению λ . Тогда x является собственным вектором сопряженного оператора \mathcal{A}^* , принадлежащим собственному значению $\bar{\lambda}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{B} := \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, где \mathcal{E} – тождественный оператор. Тогда $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}$ и из $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ следует, что

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}) = (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{B}^*\mathcal{B}.$$

Хотим доказать, что $\mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x$, т.е. что $(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E})x = \mathcal{B}^*x = 0$. Для этого достаточно убедиться, что $\mathcal{B}^*x\mathcal{B}^*x = 0$.

Имеем

$$B^* x B^* x = x B B^* x$$

свойство сопряженного оператора

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x \\ &= x B^* B x \end{aligned}$$

свойство сопряженного оператора
так как $B B^* = B^* B$

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x \\ &= x B^* B x \\ &= B x B x \end{aligned}$$

свойство сопряженного оператора

так как $B B^* = B^* B$

свойство сопряженного оператора

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x \\ &= x B^* B x \\ &= B x B x \\ &= 0 \end{aligned}$$

свойство сопряженного оператора

так как $B B^* = B^* B$

свойство сопряженного оператора

так как $B x = (A - \lambda \mathcal{E}) x = \mathbf{0}$. \square

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x \\ &= x B^* B x \\ &= B x B x \\ &= 0 \end{aligned}$$

свойство сопряженного оператора

так как $B B^* = B^* B$

свойство сопряженного оператора

так как $B x = (A - \lambda \mathcal{E}) x = \mathbf{0}$. \square

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda E) x = \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda E) x = \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ .

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x \\ &= x B^* B x \\ &= B x B x \\ &= 0 \end{aligned}$$

свойство сопряженного оператора

так как $B B^* = B^* B$

свойство сопряженного оператора

так как $B x = (A - \lambda \mathcal{E}) x = \mathbf{0}$. \square

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda x y$$

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda E) x = \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda x y = A x y$$

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda E) x = \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda x y = A x y = x A^* y$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\
 &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\
 &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\
 &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda E) x = \mathbf{0}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda x y = A x y = x A^* y = x \bar{\mu} y$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 B^*x B^*x &= x B B^*x && \text{свойство сопряженного оператора} \\
 &= x B^* Bx && \text{так как } B B^* = B^* B \\
 &= Bx Bx && \text{свойство сопряженного оператора} \\
 &= 0 && \text{так как } Bx = (A - \lambda E)x = \mathbf{0}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda xy = Ax y = x A^* y = x \bar{\mu} y = \mu xy$$

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda \mathcal{E}) x = \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda x y = A x y = x A^* y = x \bar{\mu} y = \mu x y \quad \text{т.е. } (\lambda - \mu) x y = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} B^* x B^* x &= x B B^* x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= x B^* B x && \text{так как } B B^* = B^* B \\ &= B x B x && \text{свойство сопряженного оператора} \\ &= 0 && \text{так как } B x = (A - \lambda \mathcal{E}) x = \mathbf{0}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы знаем, что собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Для нормальных операторов верно более сильное свойство:

Следствие

Собственные вектора нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x и y – собственные вектора нормального оператора A , принадлежащие соответственно λ и μ . Имеем

$$\lambda x y = A x y = x A^* y = x \bar{\mu} y = \mu x y \quad \text{т.е.} \quad (\lambda - \mu) x y = 0.$$

При $\lambda \neq \mu$ отсюда следует $x y = 0$.

Теорема 1

Линейный оператор A на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов A .

Теорема 1

Линейный оператор A на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов A .

Доказательство. Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.

Теорема 1

Линейный оператор \mathcal{A} на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов \mathcal{A} .

Доказательство. Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой. При $\dim V > 1$ возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* .

Теорема 1

Линейный оператор \mathcal{A} на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов \mathcal{A} .

Доказательство. Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.

При $\dim V > 1$ возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* .

Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* .

Теорема 1

Линейный оператор \mathcal{A} на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов \mathcal{A} .

Доказательство. Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.

При $\dim V > 1$ возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* .

Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор.

Теорема 1

Линейный оператор \mathcal{A} на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов \mathcal{A} .

Доказательство. Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.

При $\dim V > 1$ возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* .

Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_2, \dots, e_{\dim V}$ из собственных векторов ограничения \mathcal{A} на S^\perp .

Теорема 1

Линейный оператор A на унитарном пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов A .

Доказательство. Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.

При $\dim V > 1$ возьмем собственный вектор x оператора A . Его орт e_1 также будет собственным вектором для A , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора A^* .

Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно A и A^* . По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно A и A^* . Понятно, что ограничения операторов A и A^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение A на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_2, \dots, e_{\dim V}$ из собственных векторов ограничения A на S^\perp .

Добавив к нему вектор e_1 , получим ортонормированный базис всего пространства V , состоящий из собственных векторов оператора A .

Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна.

Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна.

Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому $AA^* = A^*A$, так как диагональные матрицы перестановочны.

Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому $AA^* = A^*A$, так как диагональные матрицы перестановочны. Отсюда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. \mathcal{A} – нормальный оператор. □

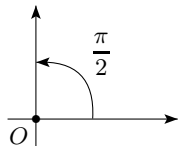
Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому $AA^* = A^*A$, так как диагональные матрицы перестановочны. Отсюда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. \mathcal{A} – нормальный оператор. □

Для нормального оператора евклидова пространства аналог теоремы 1 неверен, поскольку такой оператор может не иметь собственных векторов.

Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому $AA^* = A^*A$, так как диагональные матрицы перестановочны. Отсюда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. \mathcal{A} – нормальный оператор. □

Для нормального оператора евклидова пространства аналог теоремы 1 неверен, поскольку такой оператор может не иметь собственных векторов. Примером может служить оператор $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$,

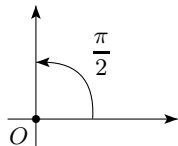
матрица которого равна $R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому $AA^* = A^*A$, так как диагональные матрицы перестановочны. Отсюда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. \mathcal{A} – нормальный оператор. \square

Для нормального оператора евклидова пространства аналог теоремы 1 неверен, поскольку такой оператор может не иметь собственных векторов. Примером может служить оператор $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$,

матрица которого равна $R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

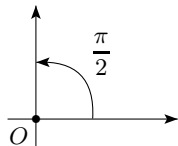


Ее эрмитово сопряженная матрица есть попросту $R^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и легко подсчитать, что $RR^T = R^TR = E$.

Достаточность. Матрица A оператора \mathcal{A} в базисе из собственных векторов этого оператора диагональна. Раз базис ортонормированный, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Поэтому $AA^* = A^*A$, так как диагональные матрицы перестановочны. Отсюда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. \mathcal{A} – нормальный оператор. □

Для нормального оператора евклидова пространства аналог теоремы 1 неверен, поскольку такой оператор может не иметь собственных векторов. Примером может служить оператор $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$,

матрица которого равна $R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Ее эрмитово сопряженная матрица есть попросту $R^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и легко подсчитать, что $RR^T = R^T R = E$. Поэтому оператор $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ нормален, но собственных векторов у $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ нет.

Несмотря на указанную трудность, структуру нормального оператора на евклидовом пространстве удастся полностью прояснить.

Несмотря на указанную трудность, структуру нормального оператора на евклидовом пространстве удается полностью прояснить.

Теорема 2

Линейный оператор A на евклидовом пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора A блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1, либо размера 2 и вида $\rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора A есть действительное собственное значение.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора A есть действительное собственное значение.

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора \mathcal{A} есть действительное собственное значение.

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1.

Возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* .

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора \mathcal{A} есть действительное собственное значение.

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1.

Возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* . Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* .

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора \mathcal{A} есть действительное собственное значение.

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1.

Возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* . Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора \mathcal{A} есть действительное собственное значение.

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1.

Возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* . Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_2, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица A' ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид.

Необходимость. Индукция по $\dim V$ с очевидной базой.
Пусть $\dim V > 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1.

У оператора \mathcal{A} есть действительное собственное значение.

В этом случае проходят рассуждения из доказательства теоремы 1. Возьмем собственный вектор x оператора \mathcal{A} . Его орт e_1 также будет собственным вектором для \mathcal{A} , а по лемме 2 e_1 будет собственным вектором и для сопряженного оператора \mathcal{A}^* . Подпространство S , натянутое на e_1 , инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_2, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица A' ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Добавив к нему вектор e_1 , получим ортонормированный базис всего пространства V . Матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе получается из A' добавлением одного блока размера 1.

Случай 2.

У оператора A нет действительных собственных значений.

Случай 2.

У оператора A нет действительных собственных значений.

В этом случае характеристический многочлен оператора A разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом.

Случай 2.

У оператора \mathcal{A} нет действительных собственных значений.

В этом случае характеристический многочлен оператора \mathcal{A} разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Возьмём один из них и пусть $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$ — его корни.

Случай 2.

У оператора A нет действительных собственных значений.

В этом случае характеристический многочлен оператора A разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Возьмём один из них и пусть $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$ — его корни. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис пространства V и запишем в нём матрицу A оператора A . Возьмем теперь унитарное пространство U размерности $\dim V$, зафиксируем в нём некоторый ортонормированный базис и определим на U линейный оператор $A_{\mathbb{C}}$ с матрицей A (*комплексификация A*).

Случай 2.

У оператора \mathcal{A} нет действительных собственных значений.

В этом случае характеристический многочлен оператора \mathcal{A} разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Возьмём один из них и пусть $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$ – его корни. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис пространства V и запишем в нём матрицу A оператора \mathcal{A} . Возьмем теперь унитарное пространство U размерности $\dim V$, зафиксируем в нём некоторый ортонормированный базис и определим на U линейный оператор $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ с матрицей A (*комплексификация \mathcal{A}*). Так как A – действительная матрица, $A^* = A^T$, а так как \mathcal{A} – нормальный оператор, $AA^T = A^T A$. заключаем, что и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ – нормальный оператор.

Случай 2.

У оператора \mathcal{A} нет действительных собственных значений.

В этом случае характеристический многочлен оператора \mathcal{A} разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Возьмём один из них и пусть $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$ – его корни. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис пространства V и запишем в нём матрицу A оператора \mathcal{A} . Возьмем теперь унитарное пространство U размерности $\dim V$, зафиксируем в нём некоторый ортонормированный базис и определим на U линейный оператор $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ с матрицей A (*комплексификация \mathcal{A}*). Так как A – действительная матрица, $A^* = A^T$, а так как \mathcal{A} – нормальный оператор, $AA^T = A^T A$. Закljučаем, что и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ – нормальный оператор. Отметим еще, что отождествляя зафиксированные базисы в V и U , можно считать, что $V \subset U$. При таком отождествлении \mathcal{A} и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ действуют на V одинаково.

Случай 2.

У оператора A нет действительных собственных значений.

В этом случае характеристический многочлен оператора A разлагается в произведение квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом. Возьмём один из них и пусть $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$ – его корни. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис пространства V и запишем в нём матрицу A оператора A . Возьмем теперь унитарное пространство U размерности $\dim V$, зафиксируем в нём некоторый ортонормированный базис и определим на U линейный оператор $A_{\mathbb{C}}$ с матрицей A (*комплексификация A*). Так как A – действительная матрица, $A^* = A^T$, а так как A – нормальный оператор, $AA^T = A^T A$. Закljučаем, что и $A_{\mathbb{C}}$ – нормальный оператор. Отметим еще, что отождествляя зафиксированные базисы в V и U , можно считать, что $V \subset U$. При таком отождествлении A и $A_{\mathbb{C}}$ действуют на V одинаково. Характеристические многочлены операторов A и $A_{\mathbb{C}}$ совпадают, так что α и $\bar{\alpha}$ – собственные значения оператора $A_{\mathbb{C}}$. Если x – собственный вектор оператора $A_{\mathbb{C}}$, принадлежащий α , то $A[x] = \alpha[x]$. Сопрягая это равенство, с учетом того, что A – действительная матрица, получаем $A[\bar{x}] = \bar{\alpha}[\bar{x}]$. Видим, что \bar{x} – собственный вектор оператора $A_{\mathbb{C}}$, принадлежащий $\bar{\alpha}$.

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $x = a + bi$, где $a, b \in V$. Тогда $\bar{x} = a - bi$.

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $x = a + bi$, где $a, b \in V$. Тогда $\bar{x} = a - bi$. Выразив отсюда вектора a и b , получим: $a = \frac{x + \bar{x}}{2}$ и $b = \frac{x - \bar{x}}{2i}$.

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $x = a + bi$, где $a, b \in V$. Тогда $\bar{x} = a - bi$. Выразив отсюда вектора a и b , получим: $a = \frac{x + \bar{x}}{2}$ и $b = \frac{x - \bar{x}}{2i}$. Учитывая, что \mathcal{A} и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ действуют на V одинаково и $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$, имеем

$$\mathcal{A}a = \mathcal{A}_\mathbb{C}a = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_\mathbb{C}x + \mathcal{A}_\mathbb{C}\bar{x}) = \frac{1}{2}(\alpha x + \bar{\alpha}\bar{x})$$

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Тогда $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Выразив отсюда вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , получим: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}$ и $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}$. Учитывая, что \mathcal{A} и $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ действуют на V одинаково и $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{a} &= \mathcal{A}_\mathbb{C}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_\mathbb{C}\mathbf{x} + \mathcal{A}_\mathbb{C}\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{x} + \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} + (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Тогда $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Выразив отсюда вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , получим: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}$ и $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}$. Учитывая, что \mathcal{A} и \mathcal{A}_C действуют на V одинаково и $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{a} &= \mathcal{A}_C\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_C\mathbf{x} + \mathcal{A}_C\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{x} + \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} + (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathcal{A}\mathbf{b} = \mathcal{A}_C\mathbf{b} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}_C\mathbf{x} - \mathcal{A}_C\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}(\alpha\mathbf{x} - \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}})$$

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Тогда $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Выразив отсюда вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , получим: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}$ и $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}$. Учитывая, что \mathcal{A} и \mathcal{A}_C действуют на V одинаково и $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{a} &= \mathcal{A}_C\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_C\mathbf{x} + \mathcal{A}_C\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{x} + \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} + (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{b} &= \mathcal{A}_C\mathbf{b} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}_C\mathbf{x} - \mathcal{A}_C\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}(\alpha\mathbf{x} - \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2i}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} - (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}\sigma(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Тогда $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Выразив отсюда вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , получим: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}$ и $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}$. Учитывая, что \mathcal{A} и \mathcal{A}_C действуют на V одинаково и $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{a} &= \mathcal{A}_C\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_C\mathbf{x} + \mathcal{A}_C\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{x} + \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} + (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{b} &= \mathcal{A}_C\mathbf{b} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}_C\mathbf{x} - \mathcal{A}_C\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}(\alpha\mathbf{x} - \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2i}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} - (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}\sigma(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Итак, подпространство S в V , натянутое на вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , инвариантно относительно оператора \mathcal{A} .

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (2)

Запишем $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Тогда $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Выразив отсюда вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , получим: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}$ и $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}$. Учитывая, что \mathcal{A} и $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ действуют на V одинаково и $\alpha = \sigma + \tau i$ и $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{a} &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{x} + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{x} + \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} + (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{b} &= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{b} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathbf{x} - \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}(\alpha\mathbf{x} - \bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2i}((\sigma + \tau i)\mathbf{x} - (\sigma - \tau i)\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2i}\sigma(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Итак, подпространство S в V , натянутое на вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , инвариантно относительно оператора \mathcal{A} . Из леммы 2 вытекает, что вектора \mathbf{x} и $\bar{\mathbf{x}}$ – собственные для оператора $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$ и принадлежат собственным значениям $\bar{\alpha}$ и α соответственно. Пользуясь этим легко проверить, что подпространство S инвариантно и относительно оператора \mathcal{A}^* .

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (3)

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор.

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (3)

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид.

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве S .

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве S .

По следствию леммы 2 вектора x и \bar{x} ортогональны как собственные вектора нормального оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, принадлежащие его различным собственным значениям α и $\bar{\alpha}$.

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (3)

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве S .

По следствию леммы 2 вектора x и \bar{x} ортогональны как собственные вектора нормального оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, принадлежащие его различным собственным значениям α и $\bar{\alpha}$. Отсюда

$$0 = x\bar{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)(\mathbf{a} - \mathbf{b}i) = \mathbf{a}\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{b}i) + (\mathbf{b}i)\mathbf{a} - (\mathbf{b}i)(\mathbf{b}i)$$

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (3)

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве S .

По следствию леммы 2 вектора x и \bar{x} ортогональны как собственные вектора нормального оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, принадлежащие его различным собственным значениям α и $\bar{\alpha}$. Отсюда

$$\begin{aligned} 0 = x\bar{x} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)(\mathbf{a} - \mathbf{b}i) = \mathbf{a}\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{b}i) + (\mathbf{b}i)\mathbf{a} - (\mathbf{b}i)(\mathbf{b}i) = \\ &= \mathbf{a}\mathbf{a} + i\mathbf{a}\mathbf{b} + i\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 + 2i\mathbf{a}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2: Необходимость, случай 2 (3)

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве S .

По следствию леммы 2 вектора \mathbf{x} и $\bar{\mathbf{x}}$ ортогональны как собственные вектора нормального оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, принадлежащие его различным собственным значениям α и $\bar{\alpha}$. Отсюда

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)(\mathbf{a} - \mathbf{b}i) = \mathbf{a}\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{b}i) + (\mathbf{b}i)\mathbf{a} - (\mathbf{b}i)(\mathbf{b}i) = \\ &= \mathbf{a}\mathbf{a} + i\mathbf{a}\mathbf{b} + i\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 + 2i\mathbf{a}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Закljučаем, что $|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ и $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$, т.е. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

По лемме 1 ортогональное дополнение S^\perp также инвариантно относительно \mathcal{A} и \mathcal{A}^* . Понятно, что ограничения операторов \mathcal{A} и \mathcal{A}^* на S^\perp перестановочны между собой, в силу чего ограничение \mathcal{A} на S^\perp – нормальный оператор. Поскольку $\dim S^\perp = \dim V - \dim S < \dim V$, по предположению индукции в S^\perp существует ортонормированный базис $e_3, \dots, e_{\dim V}$, в котором матрица ограничения \mathcal{A} на S^\perp имеет указанный в теореме блочно-диагональный вид. Остается построить «правильный» ортонормированный базис в подпространстве S .

По следствию леммы 2 вектора x и \bar{x} ортогональны как собственные вектора нормального оператора $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, принадлежащие его различным собственным значениям α и $\bar{\alpha}$. Отсюда

$$\begin{aligned} 0 = x\bar{x} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)(\mathbf{a} - \mathbf{b}i) = \mathbf{a}\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{b}i) + (\mathbf{b}i)\mathbf{a} - (\mathbf{b}i)(\mathbf{b}i) = \\ &= \mathbf{a}\mathbf{a} + i\mathbf{a}\mathbf{b} + i\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 + 2i\mathbf{a}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Закljučаем, что $|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ и $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$, т.е. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Поэтому орты $e_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ и $e_2 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$ образуют ортонормированный базис в S .

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}a = \sigma a - \tau b$, а $\mathcal{A}b = \tau a + \sigma b$.

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}\mathbf{b} = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$. Разделив эти равенства на $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, получим действие оператора \mathcal{A} на базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sigma\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \tau\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2. \end{cases}$$

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}\mathbf{b} = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$. Разделив эти равенства на $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, получим действие оператора \mathcal{A} на базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sigma\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \tau\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2. \end{cases} \quad \text{Итак, матрица ограничения оператора } \mathcal{A}$$

на подпространство S в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равна $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$.

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}\mathbf{b} = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$. Разделив эти равенства на $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, получим действие оператора \mathcal{A} на базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sigma\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \tau\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2. \end{cases} \quad \text{Итак, матрица ограничения оператора } \mathcal{A}$$

на подпространство S в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равна $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$. Если записать

комплексное число $\alpha = \sigma + \tau i$ в тригонометрической форме

$$\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ то эта матрица запишется как } \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в точности в том виде, который указан в формулировке теоремы 2.

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}\mathbf{b} = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$. Разделив эти равенства на $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, получим действие оператора \mathcal{A} на базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sigma\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \tau\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2. \end{cases} \quad \text{Итак, матрица ограничения оператора } \mathcal{A}$$

на подпространство S в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равна $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$. Если записать

комплексное число $\alpha = \sigma + \tau i$ в тригонометрической форме

$$\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ то эта матрица запишется как } \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в точности в том виде, который указан в формулировке теоремы 2.

Итак, добавив к базису $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}$ подпространства S^\perp вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , получим ортонормированный базис всего пространства V , в котором матрица оператора \mathcal{A} имеет требуемый вид.

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}\mathbf{b} = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$. Разделив эти равенства на $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, получим действие оператора \mathcal{A} на базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sigma\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \tau\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2. \end{cases} \quad \text{Итак, матрица ограничения оператора } \mathcal{A}$$

на подпространство S в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равна $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$. Если записать

комплексное число $\alpha = \sigma + \tau i$ в тригонометрической форме

$$\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ то эта матрица запишется как } \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в точности в том виде, который указан в формулировке теоремы 2.

Итак, добавив к базису $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}$ подпространства S^\perp вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , получим ортонормированный базис всего пространства V , в котором матрица оператора \mathcal{A} имеет требуемый вид.

Достаточность. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию.

Выше подсчитано, что $\mathcal{A}\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \tau\mathbf{b}$, а $\mathcal{A}\mathbf{b} = \tau\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$. Разделив эти равенства на $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, получим действие оператора \mathcal{A} на базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \sigma\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \tau\mathbf{e}_1 + \sigma\mathbf{e}_2. \end{cases} \quad \text{Итак, матрица ограничения оператора } \mathcal{A}$$

на подпространство S в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ равна $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix}$. Если записать

комплексное число $\alpha = \sigma + \tau i$ в тригонометрической форме

$$\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ то эта матрица запишется как } \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в точности в том виде, который указан в формулировке теоремы 2.

Итак, добавив к базису $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}$ подпространства S^\perp вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , получим ортонормированный базис всего пространства V , в котором матрица оператора \mathcal{A} имеет требуемый вид.

Достаточность. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы 2 перестановочен со своей транспонированной матрицей (*проверьте!*). □

Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве — еще один пример «100% действительного» факта, для **формулировки** которого комплексные числа не нужны, но **доказательство** которого использует комплексные числа.

Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве — еще один пример «100% действительного» факта, для **формулировки** которого комплексные числа не нужны, но **доказательство** которого использует комплексные числа.

Сравнение формулировок и особенно доказательств теорем 1 и 2 еще раз показывает, насколько комплексные числа лучше действительных!

Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве — еще один пример «100% действительного» факта, для **формулировки** которого комплексные числа не нужны, но **доказательство** которого использует комплексные числа.

Сравнение формулировок и особенно доказательств теорем 1 и 2 еще раз показывает, насколько комплексные числа лучше действительных!

