Тема II: Линейные операторы

§ 3. Линейные функционалы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi\colon V \to F$.

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F. Отображение $\Phi\colon V \to F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$, является линейным функционалом.

Линейные функционалы на векторных пространствах

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F. Отображение $\Phi\colon V \to F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F. Отображение $\Phi\colon V \to F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, – линейный функционал.

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F.

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi\colon V \to F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F. Отображение $\Phi\colon V \to F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi\colon V \to F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ-функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, – линейный функционал.

Пример 4: На любом пространстве V отображение, сопоставляющее каждому вектору из V элемент $0 \in F$, – линейный функционал.

Определение

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а V — векторное пространство над F. Отображение $V \times V \to F$, результат применения которого к паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ обозначается $\mathbf{xy}$, называется *скалярным произведением*, если:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}}$;
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \; \forall \alpha \in F \quad (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$;
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{xx} \geqslant 0$, причем $\mathbf{xx} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Определение

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а V — векторное пространство над F. Отображение $V \times V \to F$, результат применения которого к паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ обозначается $\mathbf{xy}$, называется *скалярным произведением*, если:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}}$;
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V\ \forall \alpha \in F \quad (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$;
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{xx} \geqslant 0$, причем $\mathbf{xx} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*; пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$ называется *унитарным*.

Определение

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а V — векторное пространство над F. Отображение $V \times V \to F$, результат применения которого к паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ обозначается $\mathbf{xy}$, называется *скалярным произведением*, если:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}}$;
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \; \forall \alpha \in F \quad (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$;
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{xx} \geqslant 0$, причем $\mathbf{xx} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*; пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$ называется *унитарным*.

Определение

Длина вектора $\mathbf{x}$ – это неотрицательное действительное число $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{xx}}$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{a}$ является линейным функционалом на V.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{a}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{x}\mathbf{a} = \mathbf{x}\mathbf{b}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*.
Если $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, то в роли $\mathbf{a}$ со свойством $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ годится вектор $\mathbf{0}$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор из V. В силу свойств скалярного произведения отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xa}$ является линейным функционалом на V.
Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi\colon V \to F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ выполняется равенство $\mathbf{xa} = \mathbf{xb}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Докажем *существование*.
Если $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, то в роли $\mathbf{a}$ со свойством $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ годится вектор $\mathbf{0}$. Поэтому будем считать, что Φ принимает не только значение 0.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ – одномерное подпространство в V.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{b}$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus (\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^{\perp}$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c}) = 0$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\mathrm{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V. Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \dfrac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{xa}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus (\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$, а одномерное подпространство $(\mathrm{Ker}(\Phi))^\perp$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c}) = 0$. С другой стороны,

$$\mathbf{xa} = (\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b})\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b} = \mathbf{c}\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b} + \gamma\mathbf{b}\frac{\overline{\beta}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b} = \gamma\beta,$$

поскольку $\mathbf{cb} = 0$. □

Заключительные замечания

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f, g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал, сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1.

Заключительные замечания

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f,g) := \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал, сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int\limits_0^1 f(t)dt$, представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1. А вот функционал, сопоставляющий многочлену f его свободный член, в виде скалярного произведения представить нельзя; другими словами, нет такого многочлена g, что для любого многочлена f выполняется равенство $\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt = f(0)$. Попробуйте обосновать это утверждение!