

Тема II: Линейные операторы

§3. Линейные функционалы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F .

Линейные функционалы на векторных пространствах

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F .

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi: V \rightarrow F$.

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F .

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi: V \rightarrow F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F . Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F .

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi: V \rightarrow F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F . Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ -функция Дирака*.)

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F .

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi: V \rightarrow F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F . Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ -функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int_0^1 f(t)dt$, – линейный функционал.

Пусть V – векторное пространство над произвольным полем F .

Линейный функционал на V – это линейный оператор $\Phi: V \rightarrow F$.

Пример 1: Пусть $V = F^n$ – пространство строк длины n над F . Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, определенное правилом $\Phi(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$, является линейным функционалом.

Пример 2: Пусть V – пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Отображение $\Phi: V \rightarrow F$, которое сопоставляет функции $f(x)$ число $f(0)$, является линейным функционалом. (Это – так называемая *δ -функция Дирака*.)

Пример 3: На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ отображение, сопоставляющее многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int_0^1 f(t)dt$, – линейный функционал.

Пример 4: На любом пространстве V отображение, сопоставляющее каждому вектору из V элемент $0 \in F$, – линейный функционал.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V .

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V . В силу свойств скалярного произведения отображение $x \mapsto xa$ является линейным функционалом на V .

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V . В силу свойств скалярного произведения отображение $x \mapsto xa$ является линейным функционалом на V .

Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V . В силу свойств скалярного произведения отображение $x \mapsto xa$ является линейным функционалом на V .

Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi: V \rightarrow F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $a \in V$ такой, что $\Phi(x) = xa$ для каждого вектора $x \in V$.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V . В силу свойств скалярного произведения отображение $x \mapsto xa$ является линейным функционалом на V .

Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi: V \rightarrow F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $a \in V$ такой, что $\Phi(x) = xa$ для каждого вектора $x \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $a, b \in V$ таковы, что для любого вектора $x \in V$ выполняется равенство $xa = xb$, то $a = b$. Докажем *существование*.

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V . В силу свойств скалярного произведения отображение $x \mapsto xa$ является линейным функционалом на V .

Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi: V \rightarrow F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $a \in V$ такой, что $\Phi(x) = xa$ для каждого вектора $x \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $a, b \in V$ таковы, что для любого вектора $x \in V$ выполняется равенство $xa = xb$, то $a = b$. Докажем *существование*.

Если $\Phi(x) = 0$ для всех $x \in V$, то в роли a со свойством $\Phi(x) = xa$ годится вектор 0 .

Пусть V – пространство со скалярным произведением, a – фиксированный вектор из V . В силу свойств скалярного произведения отображение $x \mapsto xa$ является линейным функционалом на V .

Оказывается, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением *любой* линейный функционал устроен именно так.

Теорема (строение линейного функционала)

Пусть V – конечномерное пространство со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а $\Phi: V \rightarrow F$ – линейный функционал. Тогда существует единственный вектор $a \in V$ такой, что $\Phi(x) = xa$ для каждого вектора $x \in V$.

Доказательство. Единственность вектора, определяющего функционал, сразу следует из *ослабленного закона сокращения*: если вектора $a, b \in V$ таковы, что для любого вектора $x \in V$ выполняется равенство $xa = xb$, то $a = b$. Докажем *существование*.

Если $\Phi(x) = 0$ для всех $x \in V$, то в роли a со свойством $\Phi(x) = xa$ годится вектор 0 . Поэтому будем считать, что Φ принимает не только значение 0 .

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V .

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V . Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V . Фиксируем ненулевой вектор $\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V . Фиксируем ненулевой вектор

$\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma \mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \text{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V . Фиксируем ненулевой вектор

$\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma \mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \text{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \text{Ker}(\Phi) \oplus (\text{Ker}(\Phi))^\perp$, а одномерное подпространство $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ порождается вектором $\mathbf{b}$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V . Фиксируем ненулевой вектор

$\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \text{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \text{Ker}(\Phi) \oplus (\text{Ker}(\Phi))^\perp$, а одномерное подпространство $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c}) = 0$.

Тогда по теореме о сумме ранга и дефекта $\text{Ker}(\Phi)$ – подпространство размерности $\dim V - 1$, а его ортогональное дополнение $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ – одномерное подпространство в V . Фиксируем ненулевой вектор

$\mathbf{b} \in (\text{Ker}(\Phi))^\perp$ и пусть $\beta := \Phi(\mathbf{b})$. Положим $\mathbf{a} := \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b}$ и проверим, что $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V$. Для этого представим $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{c} \in \text{Ker}(\Phi)$ и $\gamma \in F$. Такое представление возможно, так как $V = \text{Ker}(\Phi) \oplus (\text{Ker}(\Phi))^\perp$, а одномерное подпространство $(\text{Ker}(\Phi))^\perp$ порождается вектором $\mathbf{b}$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) + \Phi(\gamma\mathbf{b}) = \gamma\Phi(\mathbf{b}) = \gamma\beta,$$

поскольку $\Phi(\mathbf{c}) = 0$. С другой стороны,

$$\mathbf{x}\mathbf{a} = (\mathbf{c} + \gamma\mathbf{b}) \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b} = \mathbf{c} \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b} + \gamma\mathbf{b} \frac{\bar{\beta}}{\mathbf{b}^2} \mathbf{b} = \gamma\beta,$$

поскольку $\mathbf{c}\mathbf{b} = 0$.



В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал, сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int_0^1 f(t)dt$, представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1.

В бесконечномерных пространствах со скалярным произведением некоторые линейные функционалы представимы в виде скалярного произведения с подходящим вектором, а некоторые нет.

Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ функционал,

сопоставляющий многочлену $f \in \mathbb{R}[x]$ число $\int_0^1 f(t)dt$, представим как скалярное произведение многочлена f с многочленом 1. А вот функционал, сопоставляющий многочлену f его свободный член, в виде скалярного произведения представить нельзя; другими словами, нет такого многочлена g , что для любого многочлена f выполняется равенство $\int_0^1 f(t)g(t)dt = f(0)$. Попробуйте обосновать это утверждение!